



MATEMATYCZNE ABC  
MATURZYSTY NA POZIOMIE  
PODSTAWOWYM

ZBIÓR ZADAŃ

SAMORZĄDOWY OŚRODEK  
DORADZTWA METODYCZNEGO  
I DOSKONALENIA NAUCZYCIELI  
w Kielcach

## ZBIÓR ZADAŃ

### „Matematyczne ABC maturzysty na poziomie podstawowym”

Każdy uczeń, który kończy szkołę ponadgimnazjalną i chce przystąpić do matury, zobowiązany jest do zdawania egzaminu z matematyki na poziomie podstawowym. Spora część maturzystów ma problem z osiągnięciem progu zdawalności - 30%. Założeniem autorów tej pracy jest pomoc nauczycielom oraz uczniom w osiągnięciu tego celu.

Zbiór ten jest efektem pracy nauczycieli szkół ponadgimnazjalnych w ramach warsztatów organizowanych przez Samorządowy Ośrodek Doradztwa Metodycznego i Doskonalenia Nauczycieli w Kielcach pod kierunkiem doradcy metodycznego Piotra Leszczyńskiego. Zawiera on typowe zadania z kilku działów matematyki, które często pojawiają się w arkuszach egzaminacyjnych. Zdecydowana większość ćwiczeń tu umieszczonych pomoże nauczycielom w doborze zadań, w których uczniowie będą musieli używać nieskomplikowanych, dobrze znanych obiektów matematycznych oraz dobierać modele matematyczne do prostych sytuacji. Nauczyciele matematyki mają często problem ze znalezieniem zbiorów zadań, w których jest wystarczająca liczba zadań łatwych, pozwalających wyćwiczyć podstawowe umiejętności matematyczne u uczniów z problemami w nauce.

Autorzy:

Borowiec Katarzyna, Dobosz Beata, Hinc Zofia, Janaszek Agnieszka, Kowalczyk Jadwiga, Leszczyńska Beata, Leszczyński Piotr, Lipska Agnieszka, Lisowska Agnieszka, Macedońska Ludmiła, Mochocka Dorota, Paż Jolanta, Pielas Lidia, Polańska Dorota, Siciarska Kamila, Skucińska Elżbieta, Świąder Dorota, Wołcerz Marta.

## Spis treści

I. POTĘGI I PIERWIASTKI.....	3
Odpowiedzi (I).....	7
II. LOGARYTMY I PROCENTY .....	9
Odpowiedzi (II).....	10
III. PROCENTY.....	11
Odpowiedzi (III) .....	11
IV. WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE.....	12
Odpowiedzi (IV) .....	13
V. RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI.....	15
Odpowiedzi (V) .....	19
VI. FUNKCJE .....	20
Odpowiedzi (VI).....	25
VII. FUNKCJA LINIOWA .....	27
Odpowiedzi (VII).....	32
VIII. FUNKCJA KWADRATOWA .....	34
Odpowiedzi (VIII) .....	36
IX. CIĄGI LICZBOWE .....	37
Odpowiedzi (IX).....	38
X. CIĄG ARYTMETYCZNY .....	39
Odpowiedzi (X) .....	41
XI. CIĄG GEOMETRYCZNY .....	42
Odpowiedzi (XI).....	43
XII. CIĄG ARYTMETYCZNY I GEOMETRYCZNY .....	44
Odpowiedzi (XII).....	44
XIII. GEOMETRIA ANALITYCZNA.....	44
Odpowiedzi (XIII) .....	48

## I. POTĘGI I PIERWIĄSTKI

**Zadanie 1.** Oblicz:

a)  $2^{26} \cdot 32^{-5}$

b)  $5^{82} : 25^{40}$

c)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} : \left(\frac{8}{27}\right)^{-1}$

d)  $27^3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3$

e)  $2^{82} \cdot 4^{-40}$

f)  $\left(1\frac{1}{3}\right)^{70} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{70}$

g)  $9^{-3} \cdot 3^2$

h)  $2^4 \cdot 4^{-3}$

i)  $\left(\frac{7}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{-2}$

j)  $\left(\frac{2}{5}\right)^7 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^5$

k)  $4^6 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^6$

l)  $\left(\frac{7}{12}\right)^4 \cdot \left(\frac{12}{7}\right)^3$

m)  $\left(\frac{1}{3}\right)^6 : \left(\frac{1}{3}\right)^4 : 3^2$

n)  $25^{-2} : \left(\frac{1}{5}\right)^4 \cdot 125^{-1}$

o)  $4^{-12} \cdot \left[\left(\frac{1}{4}\right)^{13} : 4^{-20}\right]$

p)  $[(-2)^3]^2 \cdot \frac{1}{2^4}$

q)  $\frac{8^{-3} \cdot 2^2}{4^{-3}}$

**Zadanie 2.** Oblicz:

a)  $\frac{6^{-3}}{6^{-5}}$

b)  $\frac{18^4}{9^4}$

c)  $\frac{2^{15} \cdot 27^4}{6^{15}}$

d)  $\frac{17^{-3}}{17 : 17^3}$

e)  $\frac{5^2}{5^{-2}}$

f)  $\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}}$

**Zadanie 3.** Oblicz:

a)  $\frac{3^3 \cdot 27^{-5}}{81^{-2}}$

b)  $\frac{7^{-2} \cdot 7^3}{49}$

c)  $\frac{(2^3)^4}{2^5}$

d)  $\frac{5^3 \cdot 5^4}{5^5}$

e)  $\frac{128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7}{4^5}$

f)  $\frac{5^3 \cdot 5^4}{5^5}$

g)  $\frac{(13^{16})^2}{169^{17}}$

h)  $\frac{(4^3)^2}{64}$

i)  $\frac{81^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{-3}}{3^{-2}}$

j)  $\frac{4^{-4} \cdot 32^2}{4^2}$

k)  $\frac{3^{\frac{4}{5}} \cdot 9^{\frac{3}{5}}}{\frac{1}{3}}$

l)  $\frac{(5^3)^{-4} \cdot 5^{\frac{1}{2}}}{\left(5^{-\frac{1}{4}}\right)^{22}}$

m)  $\frac{(2^{-7})^3 \cdot 2}{(2^{-3})^7}$

n)  $\frac{3^{\frac{3}{4}} \cdot 3^{-\frac{1}{4}}}{3^{-\frac{1}{2}}}$

o)  $\frac{(2^2)^4}{2^5}$

p)  $\frac{(2^3)^{-1}}{2^{-3}}$

r)  $\frac{4^3 \cdot 4^{-2}}{4^4}$

s)  $\left(\frac{8^5 \cdot 8^9}{8^{-3} \cdot 8^5 \cdot 8^{12}}\right)^{-2}$

t)  $\frac{6^{-2} \cdot 6^{19} \cdot 6^{-5}}{6^{11}}$

**Zadanie 4.** Oblicz:

a)  $\frac{12^5}{81 \cdot 16}$

b)  $\frac{9^2 \cdot 5^4}{15^3}$

c)  $\frac{6^9 \cdot 3^4}{18^8}$

d)  $\frac{47 \cdot 9^4}{45 \cdot 9^5}$

e)  $\frac{3^3 \cdot 7^6}{21^4}$

f)  $\frac{3^6 \cdot 7^5}{21^5}$

g)  $\frac{2^5 \cdot 5^6}{10^5}$

h)  $\frac{8^5 \cdot 5^8}{40^5}$

i)  $\frac{125^5}{250^4}$

j)  $\frac{12^5}{243 \cdot 2^{10}}$

**Zadanie 5.** Oblicz:

a)  $\frac{10^6 \cdot (10^5 + 10^5)}{10^7}$

b)  $\frac{5^7 + 2 \cdot 5^5}{5^4 \cdot 3^3}$

c)  $\frac{3^9 + 4 \cdot 3^8}{3^{10} + 2 \cdot 3^8}$

d)  $\frac{4 \cdot 3^{14} - 3^{13} + 3^{12}}{81^3}$

e)  $\frac{8^{11} + 8^{12} + 8^{13}}{8^{11}}$

f)  $\frac{7^{11} + 2 \cdot 7^{11}}{7^{12}}$

g)  $\frac{27 + 3^3 + 3^5}{3^5}$

h)  $\frac{6^{27} - 6^{25}}{6^{26} + 6^{25}}$

i)  $\frac{3^{58} + 3^{57} + 2 \cdot 3^{56}}{2 \cdot 3^{55} + 4 \cdot 3^{56}}$

k)  $\frac{6 \cdot 7^{15} - 7^{16} + 7^{17}}{48 \cdot 7^{15}}$

l)  $\frac{3^{23} - 3^{21}}{3^{21}}$

m)  $\frac{5^{45} - 5^{47}}{3 \cdot 5^{45} + 5^{46}}$

n)  $\frac{9^{27} + 9^{26} - 5 \cdot 9^{25}}{8 \cdot 9^{25} + 9^{26}}$

o)  $\frac{6^{13} + 6^{12}}{6^{12}}$

**Zadanie 6.** Zapisz w postaci potęgi o podstawie naturalnej:

a)  $3^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

b)  $\left(4^3 : 4^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}$

c)  $5^{234} : 5^{205}$

d)  $(169^3)^4 : 13^{17}$

e)  $8^{-21} : 64^{-13}$

f)  $(5^2)^3 \cdot 2^6$

g)  $3^{-10} : (3^{-8} \cdot 3^{-4})$

h)  $\frac{1}{25} \cdot (5^6 \cdot 5^{-3})^2$

i)  $(0,25)^4 : 8^{-2} \cdot 2^8$

j)  $\left(\frac{1}{9}\right)^{-3} \cdot 27^{-6}$

k)  $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} : 32^{-4}$

l)  $27^{13} : 81^{-15}$

m)  $\frac{8^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{-2}}{2^{-0,5}}$

n)  $\frac{(2^7)^{-5} \cdot 8}{1024 \cdot (2^{-2})^5}$

o)  $\frac{125^3 \cdot (5^{-2})^4}{25^4 \cdot 25^{-5}}$

p)  $\frac{(3^{-4})^{\frac{1}{4}} \cdot 81^3}{(27^{-3})^{-\frac{16}{3}}}$

q)  $\frac{5^7 \cdot 625}{\left(5^{\frac{1}{4}}\right)^{24}}$

r)  $\frac{(5^3)^4 \cdot 2^{15}}{2^3}$

s)  $\frac{3^{15} \cdot 25^2}{15^{15}}$

t)  $4 \cdot 3^4 + 3^5 + 6 \cdot 3^3$

u)  $4 \cdot 3^{201} + 5 \cdot 3^{201}$

w)  $\sqrt[4]{49 \cdot \sqrt[3]{7}}$

z)  $\frac{2^{32} + 2^{32} + 2^{32}}{3}$

x)  $5^{20} + 5^{20} + 5^{20} + 5^{20} + 5^{20}$

**Zadanie 7.** Oblicz:

a)  $9^{\frac{1}{2}}$

b)  $8^{\frac{1}{3}}$

c)  $16^{\frac{1}{4}}$

d)  $8^{\frac{2}{3}}$

e)  $25^{\frac{3}{2}}$

f)  $16^{\frac{3}{4}}$

g)  $16^{1,5}$

h)  $16^{-\frac{3}{4}}$

i)  $144^{-\frac{1}{2}}$

j)  $49^{-\frac{3}{2}}$

k)  $\left(-\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$

l)  $(0,25)^{-\frac{3}{2}}$

m)  $9^{-1,5}$

n)  $-625^{-\frac{3}{4}}$

o)  $0,0016^{-0,25}$

**Zadanie 8.** Oblicz:

a)  $\sqrt[3]{8} \cdot 16^{-\frac{3}{4}}$

b)  $64^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{16}}$

c)  $\frac{\sqrt[3]{25 \cdot 5^3}}{5^{\frac{2}{3}}}$

d)  $(3^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{3}{4}}) : (\sqrt{3})^4$

e)  $\frac{8^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{64 \cdot 8^{-\frac{1}{2}}}}{(64^{-2})^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{2}{3}}}$

f)  $\frac{32^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} + \frac{32^{\frac{1}{2}}}{1}}{2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{3}}}$

**Zadanie 9.** Zapisz w postaci potęgi o podstawie naturalnej:

a)  $\frac{5^3 \cdot 125^2}{25^2}$

b)  $9^{12} \cdot 81^5$

c)  $16^2 : (2^2)^3$

d)  $\sqrt[3]{2^6}$

e)  $(\sqrt[5]{4})^4$

f)  $2^6 \sqrt{4^3}$

g)  $\sqrt[4]{\sqrt[3]{3}}$

h)  $(2\sqrt{2})^8$

i)  $\sqrt[3]{8^2} \cdot \sqrt[3]{4}$

j)  $\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{2}$

k)  $\sqrt[5]{\frac{1}{16}} \cdot \sqrt[3]{0,25}$

l)  $\frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}}$

m)  $\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{2}$

n)  $\sqrt{3\sqrt{9}}$

o)  $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{125}}}$

p)  $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{5}}}$

q)  $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{25} \cdot \sqrt{125}$

**Zadanie 10.** Uzasadnij, że liczba  $x$  jest podzielna przez liczbę  $m$ :

a)  $x = 3^{12} + 3^{14} + 3^{15}; \quad m = 333,$

b)  $x = 7^{100} + 7^{101} + 7^{102}; \quad m = 57,$

c)  $x = 3^{91} + 3^{90} + 3^{89}; \quad m = 13,$

d)  $x = 2^{30} + 2^{31} + 2^{32}; \quad m = 7,$

e)  $x = 3^{15} + 3^{16} + 3^{17}; \quad m = 39,$

f)  $x = 4 \cdot 5^{20} - 5^{21} + 5^{22}; \quad m = 3,$

g)  $x = 5^{2010} + 5^{2011} + 5^{2012} + 5^{2013}; \quad m = 39,$

h)  $x = 2^{198} + 2^{199} + 2^{200} + 2^{201}; \quad m = 15,$

i)  $x = 5^{2001} + 5^{2002} + 5^{2003} + 5^{2004}; \quad m = 3,$

**Zadanie 11.** Uzasadnij, że liczba  $x$  jest liczbą naturalną:

a)  $x = 16^2 - 2^7 + 32^2$

b)  $x = \frac{3^4 + 3^4 + 3^4}{3^5}$

c)  $\frac{5^8 + 5^7 + 5^6}{31 \cdot 5^5}$

d)  $x = \frac{3 \cdot 5^{10} + 5^{11}}{5^{11} - 5^{10}}$

e)  $x = \frac{4^{12} + 4^{13} + 4^{14}}{4^{12} + 4^{12} + 4^{12}}$

f)  $\frac{26 \cdot 3^{2018}}{3^{2018} + 3^{2019} + 3^{2020}}$

**Zadanie 12.**

- a) Przedstaw sumę  $9^{26} + 9^{26} + 9^{26}$  w postaci potęgi liczby 3.
- b) Wykaż, że liczba  $\frac{3^{20}+3^{18}}{3^{20}-3^{19}-3^{18}}$  jest parzysta.
- c) Wykaż, że liczba  $\frac{2^{18}+2^{17}+2^{16}+2^{15}}{3 \cdot 2^{15}+2^{15}+2^{15}}$  jest nieparzysta.
- d) Uzasadnij, że liczba  $\frac{2^8 \cdot 16^2}{2^4 \cdot 32^2}$  jest o 5 mniejsza od pola kwadratu o boku 3.

**Zadanie 13.** Oblicz:

- a)  $\sqrt{\sqrt{16}}$       b)  $\sqrt{\sqrt{3\frac{13}{81}}}$       c)  $\sqrt{36+64}$
- d)  $\sqrt{15^2-12^2}$       e)  $\sqrt{1\frac{9}{16}} - \sqrt[3]{\frac{27}{8}}$       f)  $\sqrt{12} - 3\sqrt{48} + 2\sqrt{75}$
- g)  $\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{192}$       h)  $4\sqrt{18} - \sqrt{200}$       i)  $\sqrt{3}(\sqrt{27} - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{243})$
- j)  $(2 - \sqrt{5})^2 \cdot (2 + \sqrt{5})^2$       k)  $(3\sqrt{2} + 3)^3 \cdot (3\sqrt{2} - 3)^3$       l)  $\sqrt[3]{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{81}{32}}$
- m)  $\frac{8\sqrt[4]{32}-4\sqrt[4]{2}}{6\sqrt[4]{162}}$       n)  $\frac{\sqrt{24+3\sqrt{6}}-5\sqrt{54}}{\sqrt{6}-4\sqrt{24}}$       o)  $\frac{\sqrt{72-5\sqrt{50}}+3\sqrt{128}}{4\sqrt{18+7\sqrt{2}}}$

**Zadanie 14.** Uzasadnij, że  $2 + \sqrt{3} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$ .**Zadanie 15.** Wykonaj działania i przedstaw w najprostszej postaci:

- a)  $(3\sqrt{5} - 1)^2$       b)  $2\sqrt[3]{2}(4\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{32})$       c)  $2\sqrt{3}(3 - \sqrt{3}) + 4\sqrt{3}$
- d)  $3\sqrt{6} - \sqrt{6} - 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6}$       e)  $(1 - 4\sqrt{3})(4\sqrt{3} + 1)$       f)  $3\sqrt{18} - 5\sqrt{2} + 8\sqrt{32}$
- g)  $(3 - 5^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}(3 + 5^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$       h)  $(2\sqrt{32} - \sqrt{72} - 3\sqrt{50})^2$       i)  $\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

**Zadanie 16.** Usuń niewymierność z mianownika:

- a)  $\frac{4}{3\sqrt{5}}$       b)  $\frac{1+\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$       c)  $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$
- d)  $\frac{1-\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}}$       d)  $\frac{5}{\sqrt[3]{-6}}$       e)  $\frac{\sqrt[3]{3}+1}{\sqrt[3]{3}}$
- f)  $\frac{1}{\sqrt{6}-1}$       g)  $\frac{6}{2-\sqrt{5}}$       h)  $\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$
- i)  $\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$       j)  $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$       k)  $\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}+3}$
- l)  $\frac{3}{-2-\sqrt{5}}$

**Zadanie 17.** Oblicz pole trójkąta równobocznego o boku długości  $2 + \sqrt{6}$ .

## Odpowiedzi (I)

1.

- |                   |                    |                     |                   |                  |                   |
|-------------------|--------------------|---------------------|-------------------|------------------|-------------------|
| a) 2              | b) 25              | c) 1                | d) 27             | e) 4             | f) 1              |
| g) $\frac{1}{81}$ | h) $\frac{1}{4}$   | i) 1                | j) $\frac{4}{25}$ | k) 1             | l) $\frac{7}{12}$ |
| m) $\frac{1}{81}$ | n) $\frac{1}{125}$ | o) $\frac{1}{1024}$ | p) 4              | q) $\frac{1}{2}$ |                   |

2.

- |       |       |                   |                   |        |                  |
|-------|-------|-------------------|-------------------|--------|------------------|
| a) 36 | b) 16 | c) $\frac{1}{27}$ | d) $\frac{1}{17}$ | e) 625 | f) $\frac{4}{9}$ |
|-------|-------|-------------------|-------------------|--------|------------------|

3.

- |                    |                  |                  |                  |                     |                      |
|--------------------|------------------|------------------|------------------|---------------------|----------------------|
| a) $\frac{1}{81}$  | b) $\frac{1}{7}$ | c) 128           | d) 25            | e) $\frac{1}{1024}$ | f) 25                |
| g) $\frac{1}{169}$ | h) 16            | i) $\frac{1}{9}$ | j) $\frac{1}{4}$ | k) 27               | l) $\frac{1}{15625}$ |
| m) 2               | n) 3             | o) 8             | p) 1             | r) $\frac{1}{64}$   | s) 1                 |
| t) 6               |                  |                  |                  |                     |                      |

4.

- |        |        |                     |                   |                   |      |
|--------|--------|---------------------|-------------------|-------------------|------|
| a) 192 | b) 15  | c) $\frac{6}{81}$   | d) $\frac{16}{9}$ | e) $\frac{49}{3}$ | f) 3 |
| g) 5   | h) 125 | i) $\frac{125}{16}$ | j) 1              |                   |      |

5.

- |                   |      |                   |       |       |                  |
|-------------------|------|-------------------|-------|-------|------------------|
| a) 20000          | b) 5 | c) $\frac{7}{11}$ | d) 34 | e) 25 | f) $\frac{3}{7}$ |
| g) $\frac{11}{9}$ | h) 5 | i) 3              | k) 1  | l) 8  | m) -3            |
| n) 5              | o) 7 |                   |       |       |                  |

6.

- |              |              |              |                       |             |              |
|--------------|--------------|--------------|-----------------------|-------------|--------------|
| a) $3^4$     | b) $4^{-7}$  | c) $5^{29}$  | d) $13^7$             | e) $8^5$    | f) $10^6$    |
| g) $3^2$     | h) $5^4$     | i) $2^6$     | j) $3^{-12}$          | k) $2^{24}$ | l) $3^{99}$  |
| m) $2^{-2}$  | n) $2^{-32}$ | o) $5^3$     | p) $3^{-37}$          | q) $5^{17}$ | r) $10^{12}$ |
| s) $5^{-11}$ | t) $3^6$     | u) $3^{203}$ | w) $7^{\frac{7}{12}}$ | z) $2^{32}$ | x) $5^{21}$  |

7.

- |                   |                     |                   |                    |        |      |
|-------------------|---------------------|-------------------|--------------------|--------|------|
| a) 3              | b) 2                | c) 2              | d) 4               | e) 125 | f) 8 |
| g) 64             | h) $\frac{1}{8}$    | i) $\frac{1}{12}$ | j) $\frac{1}{343}$ | k) 9   | l) 8 |
| m) $\frac{1}{27}$ | n) $-\frac{1}{125}$ | o) 5              |                    |        |      |

8.

- |                  |      |      |      |       |      |
|------------------|------|------|------|-------|------|
| a) $\frac{1}{4}$ | b) 8 | c) 1 | d) 1 | e) 64 | f) 6 |
|------------------|------|------|------|-------|------|



**9.**

- |                       |                      |                      |                       |                         |                       |
|-----------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|-------------------------|-----------------------|
| a) $5^5$              | b) $9^{22}$          | c) $2^2$             | d) $2^2$              | e) $2^{\frac{8}{5}}$    | f) $2^2$              |
| g) $3^{\frac{1}{12}}$ | h) $2^{12}$          | i) $2^{\frac{8}{3}}$ | j) $2^1$              | k) $2^{-\frac{22}{15}}$ | l) $2^{\frac{1}{12}}$ |
| m) $2^{\frac{1}{3}}$  | n) $3^{\frac{5}{9}}$ | o) $5^{\frac{1}{8}}$ | p) $5^{\frac{1}{24}}$ | q) $5^{\frac{8}{3}}$    |                       |

**13.**

- |                  |                   |                   |      |                   |                  |
|------------------|-------------------|-------------------|------|-------------------|------------------|
| a) 2             | b) $\frac{4}{3}$  | c) 10             | d) 9 | e) $-\frac{1}{4}$ | f) 0             |
| g) 0             | h) $2\sqrt{2}$    | i) 111            | j) 1 | k) 729            | l) $\frac{3}{2}$ |
| m) $\frac{2}{3}$ | n) $\frac{10}{7}$ | o) $\frac{5}{19}$ |      |                   |                  |

**15.**

- |                     |        |                         |                |        |                 |
|---------------------|--------|-------------------------|----------------|--------|-----------------|
| a) $46 - 6\sqrt{5}$ | b) 0   | c) $10\sqrt{3} - 6$     | d) $3\sqrt{6}$ | e) -47 | f) $36\sqrt{2}$ |
| g) 2                | h) 338 | i) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ |                |        |                 |

17.  $P = \frac{5\sqrt{3} + 6\sqrt{2}}{2}$ .

## II. LOGARYTMY I PROCENTY

**Zadanie 1.** Oblicz:

- |                        |                                |                                |
|------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| a) $\log_3 27$         | b) $\log_2 32$                 | c) $\log_{\sqrt{5}} 25$        |
| d) $\log_5 625$        | e) $\log_{\sqrt{2}} 4$         | f) $\log_{\sqrt{2}} 2\sqrt{2}$ |
| g) $\log_3 81$         | h) $\log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3}$ | i) $\log_{\sqrt[3]{2}} 64$     |
| j) $\log_2(\log_4 16)$ | k) $\log_2(\log_3 81)$         | l) $\log_3(\log 10)$           |

**Zadanie 2.** Oblicz:

- |                           |                            |                            |
|---------------------------|----------------------------|----------------------------|
| a) $\log_3 \frac{1}{9}$   | b) $\log_3 \frac{1}{27}$   | c) $\log_{\frac{1}{2}} 4$  |
| d) $\log_5 \frac{1}{125}$ | e) $\log_{\frac{1}{8}} 64$ | f) $\log_{\frac{1}{2}} 32$ |
| g) $\log 0,01$            | h) $\log_5 0,04$           | i) $\log_{0,1} 10$         |

**Zadanie 3.** Oblicz:

- |                          |                                       |   |
|--------------------------|---------------------------------------|---|
| a) $\log_3 \sqrt{3}$     | b) $\log_{64} 4$                      | c) $\log_{25} 5$  |
| d) $\log_{125} 25$       | e) $\log_{64} 32$                     | f) $\log_{27} 9$  |
| g) $\log_9 \frac{1}{27}$ | h) $\log_{\frac{1}{125}} 25$          | i) $\log_{64} \frac{1}{32}$                                   |
| j) $\log_5 1 - \log_2 4$ | k) $\log_{\frac{1}{8}} 2 + \log_2 16$ | l) $\log_{\frac{1}{27}} 3 - \log_{\frac{1}{125}} \frac{1}{5}$ |

**Zadanie 4.** Oblicz:

- |  |                                       |   |
|--|---------------------------------------|---|
| a) $\log_7 14 + \log_7 \frac{1}{2}$    | b) $\log_2 8 + \log_2 4$              | c) $\log 20 + \log 5$                         |
| d) $\log_2 5 + \log_2 0,1$             | e) $\log 200 + \log 5$                | f) $\log_5 10 + \log_5 2 \frac{1}{2}$         |
| g) $\log_5 100 - \log_5 4$             | h) $\log_5 250 - \log_5 2$            | i) $\log_2 48 - \log_2 3$                     |
| j) $\log_4 60 - \log_4 15$             | k) $\log_5 30 - \log_5 6$             | l) $\log_6 \frac{1}{72} - \log_6 \frac{1}{2}$ |
| m) $\log_3 \sqrt{3} + \log_6 \sqrt{6}$ | n) $\log_{\frac{1}{2}} 8 - \log_4 64$ | o) $\log_3 27 - \log_2 8$                     |
| p) $4 \log_3 27 - 5 \log_2 8$          | q) $2 - \log_3 27$                    | r) $\log_4 8 - 1$                             |

**Zadanie 5.**

Oblicz:

- |  |   |  |
|--|---|--|
| a) $\log_2 8 + 3 \log_4 2$             | b) $2 \log_6 3 + \log_6 4$                          | c) $\log_2 25 - 2 \log_2 5$                            |
| d) $2 \log_2 6 - \log_2 9$             | e) $2 \log 2 + \log 25$                             | f) $\log 125 + \log 4 - \log 5$                        |
| g) $\log_2 72 - \log_2 36 + \log_2 16$ | h) $\frac{1}{2} \log_3 25 + \log_3 243 - \log_3 15$ | i) $\frac{\log_3 21 - \log_3 7}{\log_2 8 - \log_2 16}$ |

j) $\log_3(\log 40 + 2 \log 5)$	k) $\log_5 9 : \log_5 3$	l) $\frac{\log_3 81}{\log_6 36}$
m) $2^{\log_2 13}$	n) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 5}$	o) $8^{\log_2 3}$
p) $2^{2+\log_2 5}$	q) $25^{2-\log_5 2}$	r) $7^{\frac{1}{2} \log_7 625 - 2}$

## Odpowiedzi (II)

1.

a) 3	b) 5	c) 4	d) 4	e) 4	f) 3
g) 4	h) 3	i) 18	j) 1	k) 2	l) 0

2.

a) -2	b) -3	c) -2	d) -3	e) -2	f) -5
g) -2	h) -2	i) -1			

3.

a) $\frac{1}{2}$	b) $\frac{1}{3}$	c) $\frac{1}{2}$	d) $\frac{2}{3}$	e) $\frac{5}{6}$	f) $\frac{2}{3}$
g) $-\frac{3}{2}$	h) $-\frac{2}{3}$	i) $-\frac{5}{6}$	j) -2	k) $3\frac{2}{3}$	l) $-\frac{2}{3}$

4.

a) 1	b) 5	c) 2	d) -1	e) 3	f) 2
g) 2	h) 3	i) 4	j) 1	k) 1	l) -2
m) 1	n) -6	o) 0	p) -3	q) -1	r) $\frac{1}{2}$

5.

a) $4\frac{1}{2}$	b) 2	c) 0	d) 2	e) 2	f) 2
g) 5	h) 4	i) -1	j) 1	k) 2	l) 2
m) 13	n) $\frac{1}{5}$	o) 27	p) 20	q) $\frac{625}{4}$	r) $\frac{25}{49}$

### III. PROCENTY

**Zadanie 1.** Cenę towaru 1200 zł obniżono o pewien procent. Jego cena po obniżce wynosi 840 zł. O ile procent obniżono cenę towaru?

**Zadanie 2.** Kuba zapłacił 18,90 zł za bilet z 37% zniżką. Jaka jest cena biletu bez obniżki?

**Zadanie 3.** Do ceny napoju doliczono 23% podatek VAT w wysokości 0,92 zł. Jaka jest cena netto napoju?

**Zadanie 4.** Towar z 22% podatkiem VAT kosztował 150 zł. Ile kosztuje ten towar po wzroście podatku do 23%?

**Zadanie 5.** O ile procent wzrośnie pole trójkąta równobocznego, którego bok zwiększymy o 40%?

**Zadanie 6.** Po dwóch obniżkach, za każdym razem o 15%, cena płaszcza jest równa 320 zł. Oblicz ile kosztował płaszcz przed obniżkami.

**Zadanie 7.** 44% pewnej liczby wynosi 374. Oblicz tę liczbę.

**Zadanie 8.** Towar wraz z 23% podatkiem VAT kosztuje 2460 zł. Oblicz cenę towaru bez podatku VAT.

**Zadanie 9.** W klasie jest 30 osób, w tym 12 dziewcząt. Jaki procent klasy stanowią chłopcy?

**Zadanie 10.** Płaszcz kosztował 320 zł. Jego cenę obniżono o 20%, a następnie podwyższono o 10%. Jaka jest obecnie cena płaszcza?

**Zadanie 11.** 15% słuchaczy na uniwersytecie uczy się tylko języka francuskiego, 25% tylko języka niemieckiego, a pozostałe 60 osób uczy się tylko języka angielskiego. Ile osób liczy grupa języka francuskiego?

**Zadanie 12.** Cenę pewnego towaru obniżono dwukrotnie po 15%. O ile procent obniżono cenę?

**Zadanie 13.** Cenę sukienki podwyższono o 30%, a następnie obniżono o 20%. O ile procent zmieniono cenę sukienki?

**Zadanie 14.** Cena sukienki po 10% podwyżce wynosi 121 zł. Jaka była pierwotna cena sukienki?

**Zadanie 15.** Cena brutto pewnego towaru wynosi 307,50 zł (podatek VAT wynosi 23%). Oblicz cenę netto.

### Odpowiedzi (III)

1. 30%	2. 30 zł	3. 4 zł	4. 151,23 zł	5. 96%
6. 442,91 zł	7. 850	8. 2000 zł	9. 60%	10. 281,60 zł
11. 15	12. 27,75%	13. 4%	14. 110 zł	15. 250 zł

## IV. WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

**Zadanie 1.** Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci:

- |                       |                        |                                       |
|-----------------------|------------------------|---------------------------------------|
| a) $(3 - x)^2$        | b) $(x + \sqrt{2})^2$  | c) $(-2x - 3\sqrt{3})^2$              |
| d) $(3 - 2x)^2$       | e) $-2(x + 5)^2$       | f) $2\left(\frac{1}{2}x + 4\right)^2$ |
| g) $5 - (x - 1)^2$    | h) $6 - (2x - 3)^2$    | i) $2 - 2(1 - 3x)^2$                  |
| j) $(1 - 2x)(2x + 1)$ | k) $-(5 - 3x)(5 + 3x)$ | l) $\frac{1}{3}(x - 3)(x + 3)$        |

**Zadanie 2.** Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci:

- |   |   |
|---|---|
| a) $(5x - 1)^2 - (x - 5)^2$   | b) $(4 - 2x)(2x + 4) - (3x - 1)^2$  |
| c) $(-3x + 4)^2 - (2x - 3)^2$   | d) $(x + 2y + 1)^2$   |
| e) $\left(\sqrt{2}y - \sqrt{4\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(4\frac{1}{2}y + \sqrt{2}\right)$ | f) $\left(\frac{1}{2}x + 2\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x - 5\right)\left(\frac{1}{2}x + 5\right)$ |

**Zadanie 3.** Wykonaj działania:

- |                                     |   |   |
|-------------------------------------|---|---|
| a) $(3\sqrt{3} - 1)(3\sqrt{3} + 1)$ | b) $(\sqrt{5} - 1)^2$                             | c) $(5 - 2\sqrt{5})^2$                                |
| d) $(\sqrt{2} + 2\sqrt{3})^2$       | e) $(3\sqrt{2} - 4)(\sqrt{2} + 1)$                | f) $(\sqrt{6} - 2\sqrt{3})(2\sqrt{6} + 6\sqrt{3})$    |
| g) $(2\sqrt{2} + \sqrt{32})^2$      | h) $\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)^2$ | i) $(3\sqrt{3} - 1)^2 - (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)$ |

**Zadanie 4.** Oblicz wartość wyrażenia:

- |   |  |
|---|--|
| a) $2x - x^2$ dla $x = -2$                      | b) $2x - x^2$ dla $x = \sqrt{2}$                               |
| c) $2x - x^2$ dla $x = 2 - \sqrt{3}$            | d) $-x^2 - 2x^4$ dla $x = -\sqrt{2}$                           |
| e) $-x^2 + 5x$ dla $x = -3$                     | f) $-x^2 + 5x$ dla $x = 2 - \sqrt{3}$                          |
| g) $2x^3 - x^2 + \sqrt{5}$ dla $x = -2$         | h) $2x^3 - x^2 + \sqrt{5}$ dla $x = 2\sqrt{2}$                 |
| i) $-x^5 - 2x^4 + x$ dla $x = -1$               | j) $-x^5 - 2x^4 + x$ dla $x = \sqrt{2}$                        |
| k) $(3x - 1)(3x + 1) - (2x - 1)^2$ dla $x = -1$ | l) $(1 + 4x)(1 - 4x) - (3x + 2)^2$ dla $x = -2$                |
| m) $(5x + 1)^2 - (3x - 1)^2$ dla $x = \sqrt{3}$ | n) $\frac{2x^2+2x+1}{2} - \frac{(3x-1)(3x+1)}{4}$ dla $x = -1$ |

**Zadanie 5.** Uzasadnij, że dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  oraz każdej liczby rzeczywistej  $y$  prawdziwa jest nierówność:

a)  $225x^2 + y^2 \geq 30xy$

b)  $4x^2 - 12xy + 11y^2 \geq 0$

c)  $4x^2 - 16x > -19$

d)  $\frac{1}{2}x(x - 8y) \geq -8y^2$

e)  $x^2 + 4xy + 5y^2 \geq 3(2y - 3)$

f)  $5y^2 + x^2 \geq 4xy + 4y - 4$

g)  $13x^2 + 25y^2 \geq 20xy + 6x - 1$

**Zadanie 6.** Uzasadnij, że dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej  $x$  oraz każdej liczby rzeczywistej dodatniej  $y$  prawdziwa jest nierówność:

a)  $\frac{25x}{3y} \geq 10 - \frac{3y}{x}$

b)  $\frac{9x}{4y} \geq 3 - \frac{y}{x}$

c)  $\frac{x}{y} + \frac{y}{4x} \geq 1$

d)  $\frac{4x^2+1}{5y} > 4x - 5y$

## Odpowiedzi (IV)

1.

a)  $x^2 - 6x + 9$

b)  $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$

c)  $4x^2 + 12\sqrt{3}x + 27$

d)  $4x^2 - 12x + 9$

e)  $-2x^2 - 20x - 50$

f)  $\frac{1}{2}x^2 + 8x + 32$

g)  $-x^2 + 2x + 4$

h)  $-4x^2 + 12x - 3$

i)  $-18x^2 + 12x$

j)  $1 - 4x^2$

k)  $9x^2 - 25$

l)  $\frac{1}{3}x^2 - 3$

2.

a)  $24x^2 - 24$

b)  $-13x^2 + 6x + 15$

c)  $5x^2 - 12x + 7$

d)  $x^2 + 4y^2 + 4xy + 2x + 4y + 1$

e)  $2y^2 + 16\frac{1}{2}y + 4\frac{1}{2} + \sqrt{2}$

f)  $2x + 29$

3.

a) 26

b)  $6 - 2\sqrt{5}$

c)  $45 - 20\sqrt{5}$

d)  $14 + 4\sqrt{6}$

e)  $-\sqrt{2} + 2$

f)  $6\sqrt{2} - 24$

g) 72

h)  $17 + 12\sqrt{2}$

i)  $26 - 6\sqrt{3}$

4.

- a)  $-8$       b)  $2\sqrt{2} - 2$       c)  $2\sqrt{3} - 3$       d)  $-10$       e)  $6$   
f)  $3 - \sqrt{3}$       g)  $\sqrt{5} - 20$       h)  $32\sqrt{2} + \sqrt{5} - 8$       i)  $-2$       j)  $-3\sqrt{2} - 8$   
k)  $-1$       l)  $-23$       m)  $144 + 16\sqrt{3}$       n)  $-1\frac{1}{2}$

5.

*Wskazówki*

- a)  $(15x - y)^2 \geq 0$       b)  $(2x - 3y)^2 + 2y^2 \geq 0$       c)  $(2x - 4)^2 + 3 > 0$   
d)  $\frac{1}{2}(x - 4y)^2 \geq 0$       e)  $(x + 2y)^2 + (y - 3)^2 \geq 0$       f)  $(2y - x)^2 + (y - 2)^2 \geq 0$   
g)  $(3x - 1)^2 + (2x - 5y)^2 \geq 0$

6.

*Wskazówki*

- a)  $(5x - 3y)^2 \geq 0$       b)  $(3x - 2y)^2 \geq 0$       c)  $(2x - y)^2 \geq 0$       d)  $(2x - 5y)^2 + 1 > 0$

## V. RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI

**Zadanie 1.** Sprawdź, które z podanych liczb należą do zbioru rozwiązań nierówności:

a)  $15x - 3 \geq 0$   $-1; -\frac{1}{5}; 0; \frac{1}{5}; 2$

b)  $12 - 4x < 0$   $-7; 2; 5$

**Zadanie 2.** Sprawdź, czy dana liczba  $x_0$  spełnia równanie:

a)  $x^2 - 2x - 1 = 0$   $x_0 = 1 - \sqrt{2}$

b)  $x^4 - 5x^3 + 4 = 0$   $x_0 = -1$

c)  $\frac{1}{x+3} - \frac{1}{2} = 0$   $x_0 = -1$

**Zadanie 3.** Sprawdź, która z liczb:  $a = 2\frac{1}{2}$ ;  $b = \sqrt{3}$ ;  $c = -\sqrt{2} + 1$ ;  $d = 5$

należy do zbioru rozwiązań nierówności:

a)  $\frac{3x-2}{5} \geq \frac{x+1}{3}$  b)  $\frac{5}{6}x - \frac{1}{2}x \leq \frac{3}{8}x - \frac{1}{6}$

**Zadanie 4.** Sprawdź, czy dana liczba należy do zbioru rozwiązań nierówności:

a)  $2(x - 2) \leq 4(x - 1) + 1$   $x_0 = 2$

b)  $(x - 3)^2 - (x - 1)^2 \leq 0$   $x_0 = -2$

c)  $2|x - 5| \geq 7$   $x_0 = \sqrt{2}$

**Zadanie 5.** Sprawdź, które z podanych obok równania liczb są jego pierwiastkami:

a)  $-x^2 = 5x$   $-2; 0; 5; -5$

b)  $x^2 - 6x + 11 = 2$   $\sqrt{3}; -3; 3$

c)  $(x + 1)^2 = \frac{1}{4}(1 + 2x)^2$   $-1; -\frac{3}{4}; 0$

d)  $x^2(x + 2) = 2x^2 - 8$   $-9; -2; 2; 7$



**Zadanie 6.** Rozwiąż nierówności:

a)  $\frac{1-2x}{3} > \frac{1}{2}$

b)  $\frac{x-3}{2} < \frac{2x+1}{3} - \frac{x-2}{6}$

c)  $\frac{3x-2}{6} < \frac{x-4}{2} + 1$

d)  $4 < 5x - 1 \leq 9$

e)  $\frac{x-2}{3} < 1$

f)  $4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 > (2x + 1)^2$

g)  $9(x + 1)^2 < (3x - 1)(3x + 1)$

h)  $(x - \sqrt{5})^2 > x(x - \sqrt{5})$

i)  $\frac{3-x}{6} - \frac{2+x}{3} < 1 - 3x$

j)  $-3x + 1 - \frac{4x+3}{4} < -4x - 2$

**Zadanie 7.** Rozwiąż równania:

a)  $(x - 1) \cdot (x + 2) = 2x + 4$

b)  $(4x - 1)^2 = 1$

c)  $2(2 - x) = -x(x - 3)$

**Zadanie 8.** Rozwiąż nierówności:

a)  $2x(1 + 3x) \leq 0$

b)  $x^2 - x > 2$

c)  $x^2 + 5 > 0$

d)  $5x(x + 2) > x^2 - 4$

e)  $x(x - 4) < 0$

f)  $x^2 - 5x + 1 > 0$

g)  $-x^2 < 4$

h)  $-x^2 \leq x - 6$

i)  $81 > x^2$

j)  $2(x - 3)(4 - 3x) > 0$

l)  $2x^2 - 10x \leq 2(x - 5)(2x + 3)$

m)  $(x - 3)^2 > x(5x - 6)$

n)  $17 - (2x - 3)^2 > 8$

o)  $(x - 2)^2 \geq -4x^2 + 4$

**Zadanie 9.** Rozwiąż równania:

a)  $x^3 = -125$

b)  $x^3 = -64$

c)  $x^3 - 1 = 0$

d)  $x^3 + 27 = 0$

e)  $3x(x+2)(x-7) = 0$

f)  $(x^3 - 27)(x+1) = 0$

g)  $x(x^2 - 5x + 6) = 0$

h)  $x^2(2x-1)(4-3x) = 0$

i)  $-3x(x^4 + 2)(x^2 - 6) = 0$

j)  $-2(x^2 - 5)(x^2 + 4x) = 0$

k)  $(x^3 - 8)(x^5 + 32) = 0$

**Zadanie 10.** Rozwiąż równania:

a)  $\frac{2x+6}{x^2-9} = 0$

b)  $\frac{3x-1}{x+4} = 3$

c)  $\frac{x+1}{x-5} = 7$

d)  $\frac{2x+1}{x-1} = \frac{2}{5}$

e)  $\frac{(x^2-16)(x-2)}{(x+4)(x-1)} = 0$

f)  $\frac{3x^2-5x-2}{4x-8} = \frac{3}{2}$

g)  $\frac{x^2+4x+3}{x+3} = 2$

h)  $\frac{x^2-8x-9}{x+1} = x-9$

**Zadanie 11.** Oblicz sumę pierwiastków równania:

a)  $x(2x+3)(4-5x) = 0$

b)  $(x^2-25)(x^2+1) = 0$

c)  $(x^3-64)(x+4) = 0$

d)  $x(x^2-25) = 0$

e)  $(5x^2+5)(x-2)(x+8) = 0$

f)  $(x^2+4)(x^2-3)(5x+1) = 0$

g)  $(125-x^3)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right) = 0$

**Zadanie 12.** Wyznacz liczbę rozwiązań rzeczywistych równania:

a)  $(x^2+2)(x^2+4) = 0$

b)  $(x^2-9)(3x+1) = 0$

c)  $x(x^2+7)(x^2-10)(x+4) = 0$

d)  $(4x^2-9)(x+3)^2 = 0$

e)  $(x+5)(x-1)^2 = 0$

f)  $(x^2-25)(x^2+1) = 0$

**Zadanie 13.** Podaj najmniejszą liczbę będącą rozwiązaniem równania:

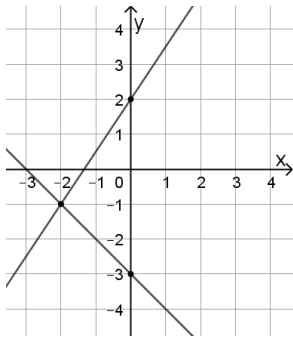
a)  $x^3(x+2)(x-3) = 0$

b)  $2x(x^2-16) = 0$

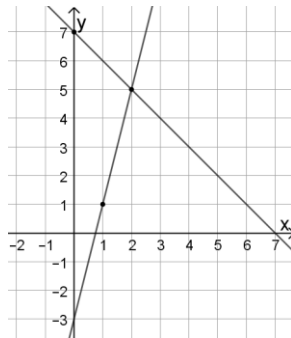
**Zadanie 14.** Wyznacz największą liczbę całkowitą spełniającą nierówność  $\frac{x}{5} + \sqrt{3} < 0$ .

**Zadanie 15.** Na rysunku przedstawiono graficzną ilustrację układu dwóch równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi  $x$  i  $y$ . Wskaż ten układ:

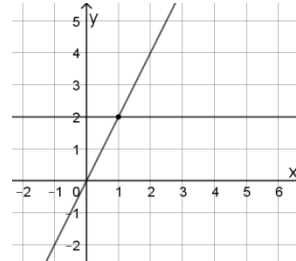
a)



b)



c)



A.  $\begin{cases} 2x + 2y = -6 \\ 3x - 2y = -4 \end{cases}$

A.  $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ x + y = 7 \end{cases}$

A.  $\begin{cases} y = x \\ y = 2 \end{cases}$

B.  $\begin{cases} x + y = -3 \\ \frac{3}{2}x - y = -4 \end{cases}$

B.  $\begin{cases} y = -x + 7 \\ y = 4x - 3 \end{cases}$

B.  $\begin{cases} y = 2x \\ y - 2 = 0 \end{cases}$

C.  $\begin{cases} x + 3y = -5 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$

C.  $\begin{cases} y = -2x + 7 \\ y = 3x - 1 \end{cases}$

C.  $\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$

D.  $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x - 2y = -4 \end{cases}$

D.  $\begin{cases} y = 3x - 3 \\ y = -x + 7 \end{cases}$

D.  $\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = 2 \end{cases}$

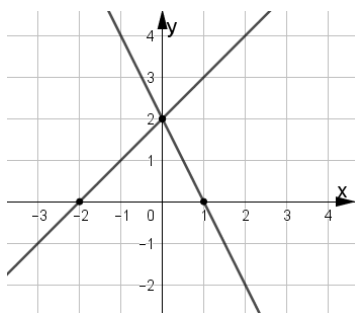
**Zadanie 16.** Wyznacz  $a$  i  $b$ , gdy rozwiązaniem układu równań jest para liczb  $x$  i  $y$ :

a)  $\begin{cases} ax - 2y = 1 \\ 2ax + by = 7 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

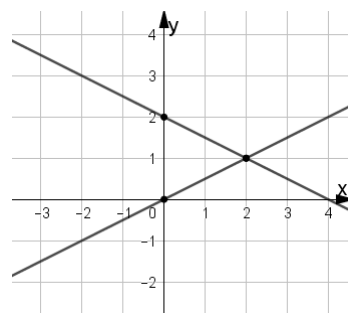
b)  $\begin{cases} ax - 2y = -6 \\ -2b - \frac{1}{2}ay = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$

**Zadanie 17.** Zapisz układ równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi  $x$  i  $y$  mając przedstawioną graficzną ilustrację układu:

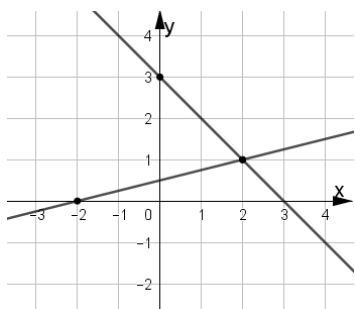
a)



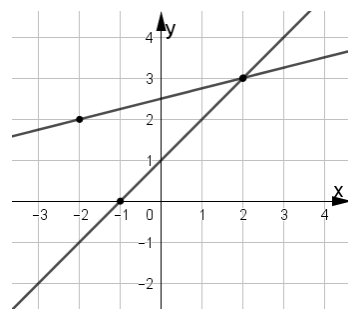
b)



c)



d)

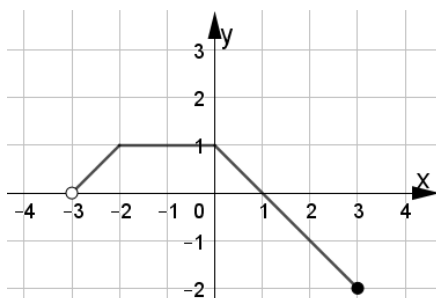


## Odpowiedzi (V)

1. a)  $x = \frac{1}{5}; x = 2$       b)  $x = 5$
2. a) TAK      b) NIE      c) TAK
3. a)  $x \geq 2\frac{3}{4}; d$       b)  $x \geq 4; d$
4. a) TAK      b) NIE      c) TAK
5. a)  $x = 0, x = -5$       b)  $x = 3$       c)  $x = -\frac{3}{4}$       d)  $x = -2$
6. a)  $x \in (-\infty; -\frac{1}{4})$       b)  $x \in R$       c)  $x \in \emptyset$       d)  $x \in (1; 2)$   
 e)  $x \in (-\infty; 5)$       f)  $x \in (-\infty; 0)$       g)  $x \in (-\infty; -\frac{5}{9})$   
 h)  $x \in (-\infty; \sqrt{5})$       i)  $x \in (-\infty; \frac{7}{15})$       j)  $x \in \emptyset$
7. a)  $x \in \{-2, 3\}$       b)  $x \in \{0, \frac{1}{2}\}$       c)  $x \in \{1, 4\}$
8. a)  $x \in (-\frac{1}{3}; 0)$       b)  $x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$       c)  $x \in R$   
 d)  $x \in (-\infty; -2) \cup (-\frac{1}{2}; +\infty)$       e)  $x \in (0; 4)$   
 f)  $x \in (-\infty; \frac{5-\sqrt{21}}{2}) \cup (\frac{5+\sqrt{21}}{2}; +\infty)$       g)  $x \in R$       h)  $x \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$   
 i)  $x \in (-9; 9)$       j)  $x \in (\frac{4}{3}; 3)$       l)  $x \in (-\infty; -3) \cup (5; +\infty)$   
 m)  $x \in (-\frac{3}{2}; \frac{3}{2})$       n)  $x \in (0; 3)$       o)  $x \in (-\infty; 0) \cup (\frac{4}{5}; +\infty)$
9. a)  $x = -5$       b)  $x = -4$       c)  $x = 1$       d)  $x = -3$   
 e)  $x \in \{-2, 0, 7\}$       f)  $x \in \{-1, 3\}$       g)  $x \in \{0, 2, 3\}$       h)  $x \in \{0, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}\}$   
 i)  $x \in \{0, \sqrt{6}, -\sqrt{6}\}$       j)  $x \in \{\sqrt{5}, -\sqrt{5}, 0, -4\}$       k)  $x \in \{-2, 2\}$
10. a)  $x \in \emptyset$       b)  $x \in \emptyset$       c)  $x = 6$       d)  $x = -\frac{7}{8}$   
 e)  $x \in \{2, 4\}$       f)  $x = \frac{5}{3}$       g)  $x = 1$       h)  $x \in R - \{-1\}$
11. a)  $-\frac{7}{10}$       b) 0      c) 0      d) 0  
 e) -6      f)  $-\frac{1}{5}$       g)  $5\frac{1}{4}$
12. a) 0      b) 3      c) 4      d) 3  
 e) 2      f) 2
13. a) -2      b) -4
14. -9
15. a) A      b) B      c) B
16. a)  $a = 1, b = 1$       b)  $a = 2, b = 1$
17. a)  $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$       b)  $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ y = -\frac{1}{2}x + 2 \end{cases}$       c)  $\begin{cases} y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \\ y = -x + 3 \end{cases}$       d)  $\begin{cases} y = \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{2} \\ y = x + 1 \end{cases}$

## VI. FUNKCJE

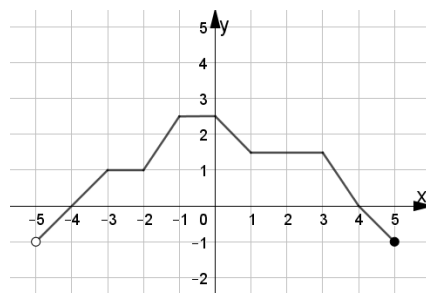
**Zadanie 1.** Poniższy rysunek przedstawia wykres funkcji  $y = f(x)$ ,



Odczytaj z wykresu

- dziedzinę funkcji,
- zbiór wartości funkcji
- miejsca zerowe funkcji,
- maksymalny przedział, w którym funkcja jest rosnąca,
- maksymalny przedział, w którym funkcja jest malejąca,
- maksymalny przedział, w którym funkcja jest stała,
- zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie,
- zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne,
- argument, dla którego wartość funkcji wynosi  $-1$ ,
- wartość funkcji dla argumentu  $-2$ ,
- naszkicuj wykres funkcji  $g(x) = f(x + 2)$ ,
- naszkicuj wykres funkcji  $h(x) = f(x) - 2$ ,

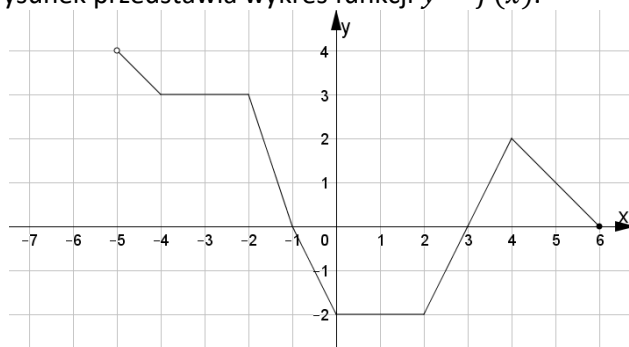
**Zadanie 2.** Poniższy rysunek przedstawia wykres funkcji  $y = f(x)$ .



Naszkiuj wykres funkcji  $g(x) = f(x - 1)$ ,

- podaj dziedzinę funkcji  $g$ ,
- podaj miejsca zerowe funkcji  $g$ ,
- określ maksymalne przedziały, w których funkcja  $g$  jest rosnąca,
- określ maksymalne przedziały, w których funkcja  $g$  jest malejąca,
- określ maksymalne przedziały, w których funkcja  $g$  jest stała,
- podaj argumenty, dla których funkcja  $g$  przyjmuje wartość  $-1$ .

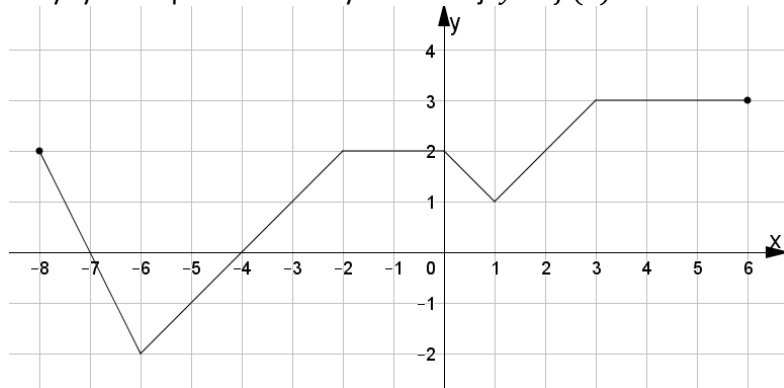
**Zadanie 3.** Poniższy rysunek przedstawia wykres funkcji  $y = f(x)$ .



Odczytaj z wykresu

- dziedzinę funkcji,
- zbiór wartości funkcji
- miejsca zerowe funkcji,
- maksymalny przedział, w którym funkcja jest rosnąca,
- maksymalne przedziały, w których funkcja jest malejąca,
- maksymalne przedziały, w których funkcja jest stała,
- zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie,
- zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne,
- argumenty, dla których wartość funkcji wynosi 3,
- wartość funkcji dla argumentu 1,
- $f(-2) - f(0) + 2 \cdot f(4)$
- zbiór wartości funkcji  $g(x) = f(x) - 3$

**Zadanie 4.** Poniższy rysunek przedstawia wykres funkcji  $y = f(x)$ .



a) Wyznacz dziedzinę funkcji:

$$g_1(x) = f(-x), \quad g_2(x) = f(x + 3) \quad g_3(x) = f(x) - 4$$

b) Wyznacz zbiór wartości funkcji:

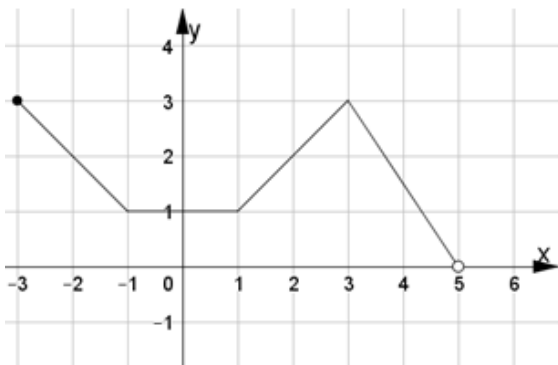
$$h_1(x) = -f(x), \quad h_2(x) = f(x - 1) \quad h_3(x) = f(x) + 3$$

c) Wyznacz miejsca zerowe funkcji:

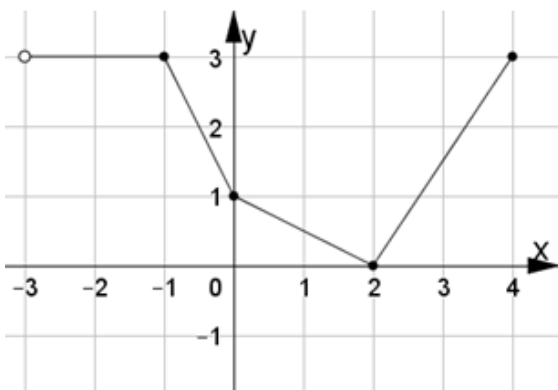
$$m_1(x) = -f(-x), \quad m_2(x) = f(x + 2) \quad m_3(x) = f(x) + 2$$

**Zadanie 5.** Poniżej przedstawione są wykresy funkcji  $y = f(x)$ .

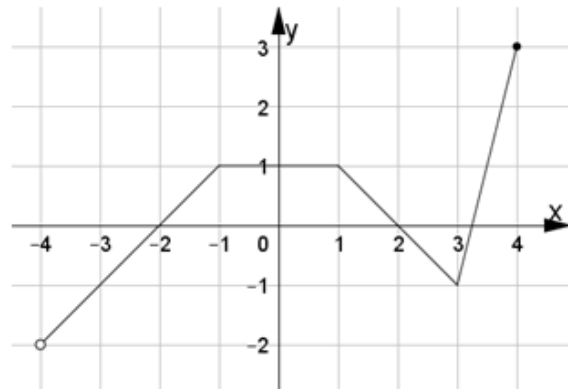
Rys. 1.



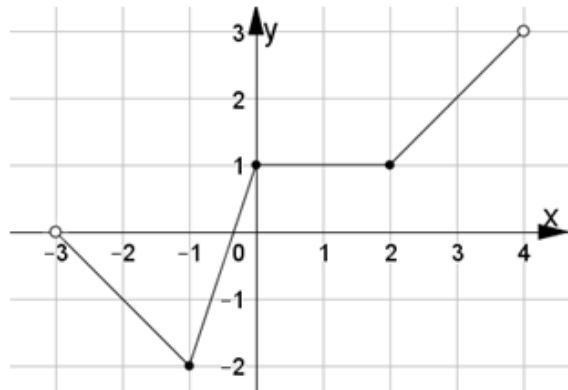
Rys. 3.



Rys. 2.



Rys. 4.



Naszczuj wykresy funkcji:

a)  $g_1(x) = f(x) + 1$

b)  $g_2(x) = f(x) - 3$

c)  $g_3(x) = f(x + 1)$

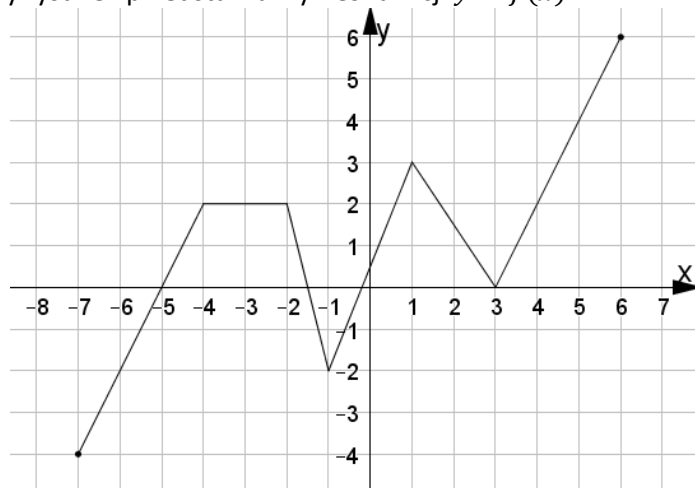
d)  $g_4(x) = f(x - 3)$

e)  $g_5(x) = f(-x) - 3$

f)  $g_6(x) = -f(x + 1) - 2$

W każdym przypadku zapisz dziedzinę oraz zbiór wartości funkcji.

**Zadanie 6.** Poniższy rysunek przedstawia wykres funkcji  $y = f(x)$ .



Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji w podanym przedziale:

a)  $\langle -7; 6 \rangle$

b)  $\langle -2; 1 \rangle$

c)  $\langle -3; 2 \rangle$

d)  $\langle 1; 6 \rangle$

**Zadanie 7.** Oblicz wartość funkcji  $f$  dla podanych obok argumentów.

a)  $f(x) = \frac{4}{x-3}$ ,  $\left\{1, \frac{2}{3}, \sqrt{2}\right\}$

b)  $f(x) = \frac{x^4}{x^8+1}$ ,  $\{1, -1, -\sqrt{2}\}$

c)  $f(x) = -x^5 - x^2 - x$ ,  $\{-1, -2, -\sqrt{2}\}$

d)  $f(x) = \frac{x^3-x+1}{1-x^2}$ ,  $\{-2, \sqrt{2}, -2\sqrt{3}\}$

**Zadanie 8.** Wyznacz miejsca zerowe funkcji  $f$ .

a)  $f(x) = -3x + \frac{2}{5}$

b)  $f(x) = \sqrt{2}x + 4$

c)  $f(x) = -x^3 + 81$

d)  $f(x) = \frac{2x-1}{3-x}$

e)  $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$

f)  $f(x) = \frac{x^2-49}{(x-3)(x-7)}$

g)  $f(x) = \frac{x-1}{x} + 3$

h)  $f(x) = \frac{x^2+3x-4}{x^2+6x-7}$

i)  $f(x) = \frac{x^2-4x+4}{3x-6}$

**Zadanie 9.** Funkcja  $f$  przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej dwucyfrowej sumę kwadratów cyfr tej liczby. Wówczas:

A.  $f(25) = 49$

B.  $f(25) = 29$

C.  $f(25) = -21$

D.  $f(25) = 21$

**Zadanie 10.** Funkcja  $f$  przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej dodatniej liczbę jej naturalnych dzielników. Wówczas:

A.  $f(24) = 4$

B.  $f(24) = 7$

C.  $f(24) = 8$

D.  $f(24) = 9$



**Zadanie 11.** Funkcja  $f$  jest określona wzorem  $f(x) = \frac{3x-6}{x}$ . Wówczas wartość funkcji  $f$  dla argumentu  $x = \sqrt{3}$  jest równa:

- A.  $3 - 2\sqrt{3}$       B.  $-3$       C.  $-\sqrt{3}$       D.  $9 - 2\sqrt{3}$

**Zadanie 12.** Wykres funkcji  $f(x) = -3^x$  przesunięto wzdłuż osi  $OX$  o 3 jednostki w kierunku ujemnym i otrzymano wykres funkcji  $g$ . Wzór funkcji  $g$  można zapisać w postaci:

- A.  $g(x) = -3^{x+3}$       B.  $g(x) = -3^{x-3}$       C.  $g(x) = -3^x - 3$       D.  $g(x) = -3^x + 3$

**Zadanie 13.** Funkcja  $f$  przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej dodatniej nie większej od 9 liczbę do niej przeciwną powiększoną o 3.

- Podaj wzór funkcji.
- Podaj zbiór wartości funkcji.
- Podaj miejsca zerowe funkcji.

**Zadanie 14.** Funkcja  $f$  określona jest wzorem  $f(x) = \frac{x^3}{x^4+2}$  dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ . Oblicz:

- $f(-1)$
- $f(\sqrt{2})$

**Zadanie 15.** Dana jest funkcja:

- $f(x) = \sqrt{x-1}$
- $f(x) = \frac{2}{x+3}$
- $f(x) = (x-2)^2$
- $f(x) = \frac{x^3}{x-2}$

Wyznacz dziedzinę tej funkcji i oblicz wartość tej funkcji dla argumentu 5.

**Zadanie 16.** Funkcja  $f$  przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej dwucyfrowej cyfrę jedności jej kwadratu. Podaj zbiór wartości tej funkcji.

## Odpowiedzi (VI)

1.

a)  $\langle -3; 3 \rangle$

b)  $\langle -2; 1 \rangle$

c) 1

d)  $\langle -3; -2 \rangle$

e)  $\langle 0; 3 \rangle$

f)  $\langle -2; 0 \rangle$

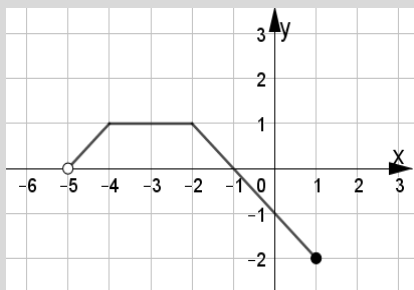
g)  $\langle -3; 1 \rangle$

h)  $\langle 1; 3 \rangle$

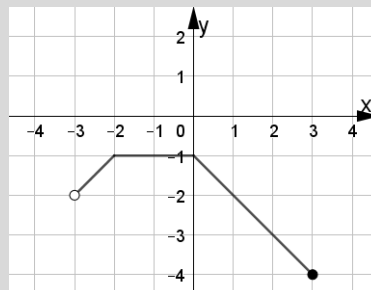
i) 2

j) 1

k)



l)



2.

a)  $\langle -4; 6 \rangle$

b)  $\{-3, 5\}$

c)  $\langle -4; -2 \rangle$  oraz  $\langle -1; 0 \rangle$

d)  $\langle 1; 2 \rangle$  oraz  $\langle 4; 6 \rangle$

e)  $\langle -2; -1 \rangle$  oraz  $\langle 2; 4 \rangle$

f)  $x = 6$

3.

a)  $\langle -5; 6 \rangle$

b)  $\langle -2; 4 \rangle$

c) -1, 3, 6

d)  $\langle 2; 4 \rangle$

e)  $\langle -5; -4 \rangle, \langle -2; 0 \rangle, \langle 4; 6 \rangle$

f)  $\langle -4; -2 \rangle, \langle 0; 2 \rangle$

g)  $x \in \langle -5; -1 \rangle \cup \langle 3; 6 \rangle$

h)  $x \in \langle -1; 3 \rangle$

i)  $x \in \langle -4; -2 \rangle$

j) -2

k) 9

l)  $\langle -5; 1 \rangle$

4.

a)  $D_{g_1} = \langle -6; 8 \rangle$

$D_{g_2} = \langle -11; 3 \rangle$

$D_{g_3} = \langle -8; 6 \rangle$

b)  $ZW_{h_1} = \langle -3; 2 \rangle$

$ZW_{h_2} = \langle -2; 3 \rangle$

$ZW_{h_3} = \langle 1; 6 \rangle$

c)  $m_1: x_1 = 4, x_2 = 7$

$m_2: x_1 = -9, x_2 = -6$

$m_3: x_1 = -6$

5.

Rys.1.

$D_{g_1} = \langle -3; 5 \rangle, ZW_{g_1} = \langle 1; 4 \rangle$

$D_{g_2} = \langle -3; 5 \rangle, ZW_{g_2} = \langle -3; 0 \rangle$

$D_{g_3} = \langle -4; 4 \rangle, ZW_{g_3} = \langle 0; 3 \rangle$

$D_{g_4} = \langle 0; 8 \rangle, ZW_{g_4} = \langle 0; 3 \rangle$

$D_{g_5} = \langle -5; 3 \rangle, ZW_{g_5} = \langle -3; 0 \rangle$

$D_{g_6} = \langle -4; 4 \rangle, ZW_{g_6} = \langle -5; -2 \rangle$

Rys.2.

$D_{g_1} = \langle -4; 4 \rangle, ZW_{g_1} = \langle -1; 4 \rangle$

$D_{g_2} = \langle -4; 4 \rangle, ZW_{g_2} = \langle -5; 0 \rangle$

$D_{g_3} = \langle -5; 3 \rangle, ZW_{g_3} = \langle -2; 3 \rangle$

$D_{g_4} = \langle -1; 7 \rangle, ZW_{g_4} = \langle -2; 3 \rangle$

$D_{g_5} = \langle -4; 4 \rangle, ZW_{g_5} = \langle -5; 0 \rangle$

$D_{g_6} = \langle -5; 3 \rangle, ZW_{g_6} = \langle -5; 0 \rangle$

Rys.3.

$D_{g_1} = \langle -3; 4 \rangle, ZW_{g_1} = \langle 1; 4 \rangle$

$D_{g_2} = \langle -3; 4 \rangle, ZW_{g_2} = \langle -3; 0 \rangle$

$D_{g_3} = \langle -4; 3 \rangle, ZW_{g_3} = \langle 0; 3 \rangle$

$D_{g_4} = \langle 0; 7 \rangle, ZW_{g_4} = \langle 0; 3 \rangle$

$D_{g_5} = \langle -4; 3 \rangle, ZW_{g_5} = \langle -3; 0 \rangle$

$D_{g_6} = \langle -4; 3 \rangle, ZW_{g_6} = \langle -5; -2 \rangle$

Rys.4.

$D_{g_1} = \langle -3; 4 \rangle, ZW_{g_1} = \langle -1; 4 \rangle$

$D_{g_2} = \langle -3; 4 \rangle, ZW_{g_2} = \langle -5; 0 \rangle$

$D_{g_3} = \langle -4; 3 \rangle, ZW_{g_3} = \langle -2; 3 \rangle$

$D_{g_4} = \langle 0; 7 \rangle, ZW_{g_4} = \langle -2; 3 \rangle$

$D_{g_5} = \langle -4; 3 \rangle, ZW_{g_5} = \langle -5; 0 \rangle$

$D_{g_6} = \langle -4; 3 \rangle, ZW_{g_6} = \langle -5; 0 \rangle$

6. a)  $y_{MIN} = -4, y_{MAX} = 6$                       b)  $y_{MIN} = -2, y_{MAX} = 3$   
 c)  $y_{MIN} = -2, y_{MAX} = 3$                       d)  $y_{MIN} = 0, y_{MAX} = 6$
7. a)  $f(1) = -2,$                        $f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{12}{7}$                        $f(\sqrt{2}) = \frac{-4\sqrt{2}-12}{7}$   
 b)  $f(1) = \frac{1}{2}$                        $f(-1) = \frac{1}{2}$                        $f(-\sqrt{2}) = \frac{4}{17}$   
 c)  $f(-1) = 1$                        $f(-2) = 30$                        $f(-\sqrt{2}) = 5\sqrt{2} - 4$   
 d)  $f(-2) = \frac{5}{3}$                        $f(\sqrt{2}) = -\sqrt{2} - 1$                        $f(-2\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - \frac{1}{11}$
8. a)  $x = \frac{2}{15}$                       b)  $x = -2\sqrt{2}$                       c)  $x = 3^3\sqrt{3}$   
 d)  $x = \frac{1}{2}$                       e)  $x = -2$                       f)  $x = -7$   
 g)  $x = \frac{1}{4}$                       h)  $x = -4$                       i)  $x \in \phi$
9. B                      10. C                      11. A                      12. A
13. a)  $f(x) = -x + 3$ , gdzie  $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$   
 b)  $ZW_f = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$   
 c)  $x_0 = 3$
14. a)  $-\frac{1}{3}$                       b)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$
15. a)  $D_f = \langle 1; +\infty \rangle, f(5) = 2$                       b)  $D_f = R \setminus \{-3\}, f(5) = \frac{1}{4}$   
 c)  $D_f = R, f(5) = 9$                       d)  $D_f = R \setminus \{2\}, f(5) = \frac{125}{3}$
16.  $ZW_f = \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$

## VII. FUNKCJA LINIOWA

**Zadanie 1.** Dla jakiej wartości  $m$  miejscem zerowym funkcji  $f(x) = (4 - m)x + 8$  jest liczba 2?

**Zadanie 2.** Podaj miejsce zerowe funkcji  $y = \sqrt{2}(x + 2) - 6$ .

**Zadanie 3.** Dla jakiego  $a$  do wykresu funkcji  $y = 4x + a$  należy punkt  $(-2; 2)$  ?

**Zadanie 4.** Dla jakiego  $m$  proste o równaniach  $y = (2m - 3)x + 7$  i  $y = (6 + 3m)x - 2$  są równoległe?

**Zadanie 5.** Oblicz współrzędne punktu przecięcia się prostych o równaniach:

$$4x + 2y = 2 \quad \text{i} \quad y = \frac{2}{3}x + 1.$$

**Zadanie 6.** Oblicz miejsce zerowe funkcji liniowej  $f(x) = \sqrt{3}(x + 2) - 12$ .

**Zadanie 7.** Dana jest funkcja  $f(x) = -2x + 3$ . Oblicz:  $f(-1) - f(2)$ .

**Zadanie 8.** Znajdź wzór funkcji liniowej  $f$  o której wiadomo, że  $f(1) = 3$ ,  $f(3) = -1$ .

**Zadanie 9.** Dana jest funkcja opisana wzorem  $y = (2 - m)x + m - 3$ , gdzie  $x \in R$ :

- dla jakich  $m$  funkcja jest malejąca?
- dla jakich  $m$  wykres funkcji przecina oś  $OY$  poniżej osi  $OX$ ?

**Zadanie 10.** Dana jest funkcja liniowa określona wzorem  $f(x) = -\frac{1}{3}x + 7$ . Napisz wzór funkcji, której wykres jest:

- równoległy do wykresu podanej funkcji i przechodzi przez punkt  $M = (-1; 2)$ ;
- prostopadły do wykresu podanej funkcji i przechodzi przez punkt  $M = (-1; 2)$ .

**Zadanie 11.** Dana jest funkcja  $y = -4x + 2$ :

- wyznacz punkty przecięcia się wykresu funkcji z osiami układu współrzędnych;
- wyznacz wartość funkcji dla  $x = -2\sqrt{3}$ ;

- c) wyznacz zbiór wszystkich argumentów dla których funkcja przyjmuje wartości nie większe niż 5.

**Zadanie 12.** Funkcja liniowa określona jest wzorem  $f(x) = -3x + 1$ . Napisz wzór funkcji  $g$ , której wykres powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji  $f$  przez:

- a) symetrię osiową względem osi  $OX$ ;  
b) symetrię osiową względem osi  $OY$ .

**Zadanie 13.** Napisz wzór funkcji liniowej, gdy  $y = -5x + b$  i miejsce zerowe  $x_0 = -1$ .

**Zadanie 14.** Napisz wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkt  $A = (-3; -1)$  i jest prostopadły do wykresu funkcji  $y = -\frac{1}{3}x - 2\sqrt{3}$ .

**Zadanie 15.** Napisz wzór funkcji liniowej, której wykres jest prostopadły do wykresu funkcji  $y = 3x - 4$  i przechodzi przez punkt  $A = (6; -2)$ .

**Zadanie 16.** Napisz wzór funkcji liniowej, której wykres jest równoległy do wykresu funkcji  $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$  i przechodzi przez punkt  $P = (4; 1)$ .

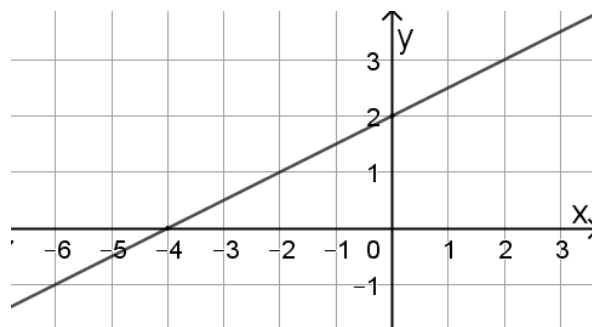
**Zadanie 17.** Napisz wzór funkcji liniowej, wiedząc że do jej wykresu należą punkty  $A$  i  $B$  takie, że:

- a)  $A = (-4; 2)$ ,  $B = (0; -3)$   
b)  $A = (-1; 8)$ ,  $B = (4; 8)$

**Zadanie 18.** Napisz wzór funkcji liniowej, której wykres tworzy z osią  $OX$  kąt  $\alpha = 150^\circ$  i jej miejscem zerowym jest liczba 3.

**Zadanie 19.** Napisz wzór funkcji liniowej, której wykres przecina oś  $OY$  w punkcie  $(0; -8)$  oraz przyjmuje wartości dodatnie dla  $x < -2$ .

**Zadanie 20.** Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji liniowej. Odczytaj z rysunku odpowiednie dane i napisz wzór tej funkcji.



**Zadanie 21.** Wyznacz wzór funkcji liniowej, o której wiadomo, że  $f(-1) = 4$  oraz do wykresu funkcji należy punkt  $P = (1; -2)$ .

**Zadanie 22.** Dana jest funkcja  $f(x) = -4x + 7$ . Oblicz  $f\left(-\frac{1}{2}\right) - f(2)$ .

**Zadanie 23.** Określ monotoniczność funkcji  $f$ :

a)  $f(x) = (\pi - 3,14)x + \sqrt{13}$

b)  $f(x) = (1 - \sqrt{2})x - 4$

**Zadanie 24.** Wyznacz  $m$ , dla którego podana  $f$  jest malejąca:

a)  $f(x) = \left(-\frac{2}{7}m - 4\right)x + 1$

b)  $f(x) = (m^2 - 9)x - 3$

**Zadanie 25.** Wyznacz współczynnik  $b$ , jeżeli:

a) miejscem zerowym funkcji  $f(x) = -2x + b$  jest  $\frac{1}{2}$

b) wykres funkcji  $f(x) = 4x + b$  przechodzi przez punkt  $P = (-2; 2)$

c) funkcja  $f(x) = -x + b$  ma takie samo miejsce zerowe jak funkcja  $g(x) = 2x + 3$

**Zadanie 26.** Wyznacz miejsce zerowe funkcji:

a)  $f(x) = 3x - 8$

b)  $f(x) = 7 + 5x$

- c)  $f(x) = -3x + 1$   
 d)  $f(x) = 3 - 5\frac{1}{2}x$   
 e)  $f(x) = 2\frac{2}{3}x + 1\frac{1}{2}$   
 f)  $f(x) = \sqrt{3}x + 3$   
 g)  $f(x) = \sqrt{2}(x - 4) - 8$

**Zadanie 27.** Dla jakich  $m$  funkcja:

- a)  $f(x) = (2 - m)x + 1$  jest rosnąca?  
 b)  $f(x) = -(3 - m)x + 2$  jest malejąca?  
 c)  $f(x) = (1,02 + 0,2m)x + 1$  jest stała?

**Zadanie 28.** Znajdź wzór funkcji liniowej  $f$ , której współczynnik kierunkowy  $a = \frac{2}{3}$ , a jej wykres przechodzi przez punkt  $P = (3; -5)$ .

**Zadanie 29.** Dla jakiego  $m$  liczba 3 jest miejscem zerowym funkcji  $f(x) = -2x + m - 2$ .

**Zadanie 30.** Funkcje  $f(x) = -3x + 2$  oraz  $g(x) = 2x + b$  mają takie samo miejsce zerowe. Wyznacz współczynnik  $b$  funkcji  $g$ .

**Zadanie 31.** Do wykresu funkcji liniowej  $f(x) = -2x + 5$  należą punkty  $A = (a; -3)$  oraz  $B = (-1; b)$ . Oblicz brakujące współrzędne punktów  $A$  i  $B$ .

**Zadanie 32.** Funkcja liniowa przecina oś  $OY$  w punkcie  $(0; 3)$  i jest nachylona do osi  $OX$  pod kątem  $45^\circ$ . Napisz wzór tej funkcji.

### ZADANIA ZAMKNIĘTE

**Zadanie 33.** Funkcja liniowa  $f(x) = (m^2 - 9)x + m - 2$  jest rosnąca dla:

- A.  $m \in \{-3, 3\}$       B.  $m \in (-3; 3)$       C.  $m \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$       D.  $m \in R$

**Zadanie 34.** Do wykresu funkcji liniowej  $f(x) = ax - 3$  należy punkt  $A = (-4; 1)$ . Liczba  $a$  wynosi:

- A.  $a = 1$       B.  $a = 5$       C.  $a = -11$       D.  $a = -1$

**Zadanie 35.** Wskaż wzór funkcji liniowej, której wykres jest równoległy do wykresu funkcji  $y = -\frac{1}{5}x - 1$ :

- A.  $y = \frac{1}{5}x - 1$       B.  $y = -\frac{1}{5}x + 6$       C.  $y = 5x + 1$       D.  $y = 5x - 1$

**Zadanie 36.** Wskaż wzór funkcji liniowej, której wykres jest prostopadły do wykresu funkcji  $y = 2\frac{2}{3}x + 1$ :

- A.  $y = 2x + 6$       B.  $y = \frac{8}{3}x - 2$       C.  $y = -\frac{3}{8}x + 1$       D.  $y = -\frac{8}{3}x$

**Zadanie 37.** Liczba 4 jest miejscem zerowym funkcji liniowej  $f(x) = (4 - 2m)x + 8$ . Wynika stąd, że:

- A.  $m = -4$       B.  $m = 4$       C.  $m = 3$       D.  $m = -3$

**Zadanie 38.** Dana jest funkcja liniowa  $f(x) = -1\frac{1}{8}x + 6$ . Miejscem zerowym tej funkcji jest:

- A.  $-5\frac{1}{3}$       B.  $\frac{54}{8}$       C.  $-\frac{54}{8}$       D.  $5\frac{1}{3}$

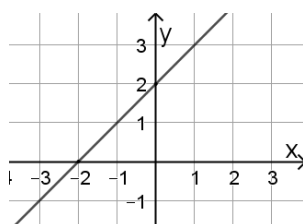
**Zadanie 39.** Dana jest funkcja liniowa  $f(x) = 1\frac{1}{6}x + 12$ . Wskaż zdanie prawdziwe:

- A. Funkcja jest malejąca.  
 B. Wykres funkcji przecina oś  $OY$  w punkcie  $(12; 0)$ .  
 C. Miejscem zerowym funkcji jest liczba  $-10\frac{2}{7}$ .  
 D. Miejscem zerowym jest punkt  $(-10\frac{2}{7}; 0)$ .

**Zadanie 40.** Wykres funkcji liniowej  $y = -2x + 3$  przecina oś  $OX$  w punkcie o współrzędnych:

- A.  $(0; \frac{3}{2})$       B.  $(\frac{3}{2}; 0)$       C.  $(-\frac{3}{2}; 0)$       D.  $(0; -\frac{3}{2})$

**Zadanie 41.** Na podstawie wykresu podaj wzór funkcji liniowej:





A.  $f(x) = -x + 2$

C.  $f(x) = x - 2$

B.  $f(x) = x + 2$

D.  $f(x) = -x - 2$

**Zadanie 42.** Wykres funkcji liniowej  $f(x) = ax + b$  nie przechodzi przez I ćwiartkę układu współrzędnych. Stąd wynika, że:

A.  $a < 0$  i  $b < 0$

B.  $a < 0$  i  $b > 0$

C.  $a > 0$  i  $b > 0$

D.  $a > 0$  i  $b < 0$

**Zadanie 43.** Punkt  $(2\sqrt{2}; -2)$  należy do wykresu funkcji  $y = -\sqrt{2}x + b$ . Wtedy jej współczynnik  $b$  jest równy:

A.  $b = 2$

B.  $b = -6$

C.  $b = 0$

D.  $b = -4$

**Zadanie 44.** Wskaż wzór funkcji liniowej, wiedząc że punkty  $A = (-4; 0)$  i  $B = (0; 2)$  należą do jej wykresu:

A.  $y = \frac{1}{2}x + 2$

B.  $y = -\frac{1}{2}x + 2$

C.  $y = 2x - 4$

D.  $y = -2x - 4$

## Odpowiedzi (VII)

1.  $m = 8$

2.  $3\sqrt{2} - 2$

3.  $a = 10$

4.  $m = -9$

5.  $(0; 1)$

6.  $4\sqrt{3} - 2$

7. 6

8.  $f(x) = -2x + 5$

9a)  $m \in (2; +\infty)$

9b)  $m \in (-\infty; 3)$

10a)  $y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

10b)  $y = 3x + 5$

11a)  $(0; 2), (\frac{1}{2}; 0)$

11b)  $8\sqrt{3} + 2$

11c)  $x \in (-\frac{3}{4}; +\infty)$

12a)  $y = 3x - 1$

12b)  $y = 3x + 1$

13.  $y = -5x - 5$

14.  $y = 3x + 8$

15.  $y = -\frac{1}{3}x$

16.  $y = -\frac{1}{2}x + 3$

17a)  $y = -\frac{5}{4}x - 3$

17b)  $y = 8$

18.  $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$

19.  $y = -4x - 8$

20.  $y = \frac{1}{2}x + 2$

21.  $y = -3x + 1$

22. 10

23a)  $a > 0$ ; funkcja rosnąca

23b)  $a < 0$ ; funkcja malejąca

24a)  $m \in (-14; +\infty)$

24b)  $m \in (-3; 3)$

25a)  $b = 1$

25b)  $b = 10$

25c)  $b = -\frac{3}{2}$

26.

a)  $x = \frac{8}{3}$

b)  $x = -\frac{7}{5}$

c)  $x = \frac{1}{3}$

d)  $x = \frac{6}{11}$

e)  $x = -\frac{9}{16}$

f)  $x = -\sqrt{3}$

g)  $x = 4(\sqrt{2} + 1)$

27a)  $m < 2$

27 b)  $m < 3$

27c)  $m = -5,1$

28.  $y = \frac{2}{3}x - 7$

29.  $m = 8$

30.  $b = -\frac{4}{3}$

31.  $a = 4, b = 7$

32.  $y = x + 3$

**Zadania zamknięte**

33. C

34. D

35. B

36. C

37. C

38. D

39. C

40. B

41. B

42. A

43. A

44. A

## VIII. FUNKCJA KWADRATOWA

**Zadanie 1.** Dana jest funkcja kwadratowa:  $y = -2x^2 - 2x + 12$ :

- podaną funkcję przedstaw w postaci kanonicznej i iloczynowej;
- podaj równanie osi symetrii paraboli będącej wykresem funkcji;
- podaj największą i najmniejszą wartość funkcji w przedziale  $\langle -1; 1 \rangle$ ;
- narysuj wykres tej funkcji.

**Zadanie 2.** Zbiorem wartości funkcji kwadratowej  $y = 2x^2 - 4x + c$  jest przedział  $\langle 5; +\infty \rangle$ . Oblicz wartość współczynnika  $c$ .

**Zadanie 3.** Przedział  $\langle -\infty; -1 \rangle$  jest maksymalnym zbiorem, w którym funkcja  $y = 3x^2 + bx$  jest malejąca. Wyznacz najmniejszą wartość tej funkcji.

**Zadanie 4.** Podaj najmniejszą wartość funkcji  $y = 3x^2 + x$ .

**Zadanie 5.** Funkcja kwadratowa  $f(x) = 3x^2 + bx + c$  ma dwa miejsca zerowe  $-1$  i  $3$ . Oblicz wartość współczynników  $b$  i  $c$ .

**Zadanie 6.** Dany jest wzór funkcji kwadratowej  $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$ ,

- wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli;
- wyznacz zbiór wartości funkcji;
- oblicz miejsca zerowe;
- wyznacz równanie osi symetrii wykresu;
- podaj wzór funkcji w postaci iloczynowej;
- podaj przedział, w którym funkcja jest rosnąca (malejąca);
- podaj najmniejszą wartość funkcji ;
- oblicz wartość  $f(-2)$ ;
- rozwiąż równanie  $f(x) = 1$ .

**Zadanie 7.** Dany jest wzór funkcji  $f(x) = -2(x + 5)^2$ :

- wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli;
- podaj zbiór wartości funkcji;
- podaj maksymalne przedziały monotoniczności funkcji;
- podaj równanie osi symetrii wykresu;
- zapisz wzór funkcji w postaci ogólnej;
- podaj współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji z osią OY;

- g) wyznacz miejsca zerowe funkcji ;
- h) podaj największą (najmniejszą) wartość funkcji.

**Zadanie 8.** Wyznacz wartość współczynnika  $b$ , aby funkcja  $f(x) = x^2 + bx - 3$  była malejąca w przedziale  $(-\infty; -2)$  i rosnąca w przedziale  $(-2; +\infty)$

**Zadanie 9.** Dana jest funkcja  $f(x) = -x^2 + 4x + c$ . Wyznacz wartości  $c$ , dla których funkcja przyjmuje tylko wartości ujemne.

**Zadanie 10.** Dana jest funkcja  $f(x) = x^2 + bx + c$ . Miejscami zerowymi tej funkcji są liczby: 1 i  $-3$ . Wyznacz  $b$  i  $c$ .

**Zadanie 11.** Osią symetrii wykresu  $y = ax^2 + 10x + 1$  jest prosta o równaniu  $x = -2$ . Wyznacz  $a$ .

**Zadanie 12.** Dana jest funkcja kwadratowa  $f(x) = -x^2 + 2x + 8$ .

- a) Oblicz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji  $f$ .
- b) Podaj równanie osi symetrii wykresu funkcji.
- c) Podaj przedziały monotoniczności funkcji.
- d) Podaj zbiór wartości funkcji.
- e) Oblicz miejsca zerowe funkcji.
- f) Podaj współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji z osią  $OY$ .
- g) Naskicuj wykres funkcji kwadratowej.
- h) Oblicz największą i najmniejszą wartość funkcji w przedziale  $(2; 3)$ .
- i) Oblicz wartość największą i najmniejszą funkcji w przedziale  $(-2; 2)$ .
- j) Podaj wzór funkcji  $f$  w postaci kanonicznej.
- k) Podaj wzór funkcji  $f$  w postaci iloczynowej.

**Zadanie 13.** Napisz wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, wiedząc że funkcja ta przyjmuje wartość największą równą 2, jest malejąca tylko w przedziale  $(1; +\infty)$  i jednym z jej miejsc zerowych jest  $x = 3$ .

**Zadanie 14.** Wykresem funkcji kwadratowej  $f$  określonej wzorem  $f(x) = 2x^2 + bx + c$  jest parabola, która przecina oś  $OX$  w punktach  $A = (-4; 0)$ ,  $B = (2; 0)$ . Wyznacz współczynniki  $b$  oraz  $c$ .

**Zadanie 15.** Dana jest funkcja kwadratowa  $f(x) = x^2 + 6x + 10$ .

- Oblicz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji  $f$ .
- Podaj współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji z osią  $OY$ .
- Oblicz miejsca zerowe funkcji (o ile istnieją).
- Zapisz postać kanoniczną i iloczynową (o ile istnieje).
- Naszkcuj wykres funkcji.
- Podaj równanie osi symetrii paraboli.
- Podaj najmniejszą wartość funkcji w przedziale  $\langle -5; -1 \rangle$ .

## Odpowiedzi (VIII)

- $y = -2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{2}$  – p. kanoniczna;  $y = -2(x - 2)(x + 3)$  – p. iloczynowa
  - $x = -\frac{1}{2}$
  - $y_{MAX} = \frac{25}{2}$ ,  $y_{MIN} = 8$
- $c = 7$
- $y_{MIN} = -3$
- $y_{MIN} = -\frac{1}{12}$
- $b = -6$ ,  $c = -9$
- $W = \left(\frac{1}{2}; 0\right)$
  - $\langle 0; +\infty \rangle$
  - $x = \frac{1}{2}$
  - $x = \frac{1}{2}$
  - $f(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$
  - $f \nearrow: \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ ;  $f \searrow: \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$
  - $y_{MIN} = 0$
  - $f(-2) = 25$
  - $\{0; 1\}$
- $W = (-5; 0)$
  - $ZW_f = (-\infty; 0)$
  - $f \nearrow: (-\infty; -5)$ ;  $f \searrow: (-5; +\infty)$
  - $x = -5$
  - $y = -2x^2 - 20x - 50$
  - $P = (0; -50)$
  - $x = -5$
  - $y_{MAX} = 0$ ;  $y_{MIN}$  – nie istnieje
- $b = 4$
- $c < -4$
- $b = 2$ ,  $c = -3$
- $a = 2,5$
- $W = (1; 9)$
  - $x = 1$
  - $f \nearrow: (-\infty; 1)$ ;  $f \searrow: \langle 1; +\infty \rangle$
  - $ZW_f = (-\infty; 9)$
  - $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 4$
  - $P = (0; 8)$
  - $y_{MAX} = f(2) = 8$ ;  $y_{MIN} = f(3) = 5$
  - $y_{MAX} = f(1) = 9$ ;  $y_{MIN} = f(-2) = 0$
  - $f(x) = -(x - 1)^2 + 9$
  - $f(x) = -(x + 2)(x - 4)$
- $y = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + 2$
- $b = 4$ ,  $c = -16$
- $W = (-3; 1)$
  - $(0; 10)$
  - brak
  - $f(x) = (x + 3)^2 + 1$  – postać kanoniczna, iloczynowa nie istnieje
  - $x = -3$
  - $y_{MIN} = 1$

## IX. CIĄGI LICZBOWE

### ZADANIA ZAMKNIĘTE

**Zadanie 1.** Dany jest ciąg  $(a_n)$  określony wzorem  $a_n = \frac{4+n}{n+1}$  dla  $n \geq 1$ . Wtedy  $a_3 - a_5$  wynosi

- A.  $\frac{1}{4}$                       B.  $\frac{7}{4}$                       C.  $-\frac{1}{4}$                       D.  $\frac{3}{2}$

**Zadanie 2.** Suma pięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego  $(a_n)$  jest równa 0. Wyraz trzeci tego ciągu jest równy

- A. 5                      B. 0                      C. -5                      D. 2

**Zadanie 3.** Wzór ogólny ciągu  $(a_n)$ , w którym  $a_2 = 8$ ,  $a_4 = 16$  może być równy

- A.  $a_n = n^2 + 4$               B.  $a_n = -4n + 4$               C.  $a_n = 4n$                       D.  $a_n = -4n$

**Zadanie 4.** Liczba ujemnych wyrazów ciągu  $(a_n)$  o wyrazie ogólnym  $a_n = n^2 - 4n$  jest równa

- A. 5                      B. 2                      C. 1                      D. 3

**Zadanie 5.** Dany jest ciąg  $(a_n)$  określony wzorem  $a_n = \frac{(-2)^{n+3}}{n^2+3}$ . Piąty wyraz tego ciągu jest równy

- A.  $\frac{29}{28}$                       B.  $-\frac{32}{25}$                       C.  $-\frac{29}{28}$                       D.  $\frac{32}{25}$

**Zadanie 6.** Suma wszystkich ujemnych wyrazów ciągu  $(a_n)$  określonego wzorem  $a_n = n^2 - 9$  jest równa

- A. -5                      B. -3                      C. -13                      D. -7

**Zadanie 7.** Dany jest ciąg określony wzorem  $a_n = -\frac{2}{5}n + 3$ . Wtedy

- A.  $a_5 = -1\frac{2}{5}$               B.  $a_{11} = -1\frac{2}{5}$               C.  $a_{10} = -1\frac{2}{5}$                       D.  $a_{12} = -1\frac{2}{5}$

### ZADANIA OTWARTE

**Zadanie 8.** Dany jest ciąg  $(a_n)$  określony wzorem  $a_n = n^2 - 11n + 28$  dla  $n \geq 1$ . Które wyrazy ciągu są ujemne?

**Zadanie 9.** Dany jest ciąg  $a_n = (-1)^n \cdot (2 - n)$ . Oblicz:  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_{20}$ .

**Zadanie 10.** Który wyraz ciągu  $a_n = n^2 - 5$  jest równy 4?

**Zadanie 11.** Dany jest ciąg  $(a_n)$  określony wzorem  $a_n = \frac{2-4n}{3}$ . Czy wyrazem ciągu może być liczba -6? Jeśli tak, to podaj który to wyraz.

**Zadanie 12.** Ciąg  $(a_n)$  jest określony wzorem  $a_n = (-2)^n$ , dla  $n \geq 1$ . Wyznacz sumę dziesięciu początkowych jego wyrazów.

## Odpowiedzi (IX)

### Zadania zamknięte

1. A

2. B

3. C

4. D

5. C

6. C

7. B

### Zadania otwarte

8.  $a_5, a_6$ 9.  $a_1 = -1, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = -2, a_{20} = -18$ 10.  $a_3 = 4$ 11. TAK,  $a_5$ 12.  $S_{10} = 682$

## X. CIĄG ARYTMETYCZNY

**Zadanie 1.** Zbadaj, czy ciąg  $(a_n)$  określony wzorem  $a_n = \frac{3-2n}{5n}$  dla  $n \geq 1$  jest ciągiem arytmetycznym.

**Zadanie 2.** Wykaż, że ciąg  $(a_n)$  jest arytmetyczny:

a)  $a_n = -3n + 5$

b)  $a_n = \frac{1-2n}{4}$

c)  $a_n = \frac{2+3n}{5}$

d)  $a_n = (n-1)^2 - n^2$

*Wskazówka*

Wyznacz różnicę  $a_{n+1} - a_n$

**Zadanie 3.** W ciągu arytmetycznym  $(a_n)$ , określonym dla  $n \geq 1$ , dane są:  $a_6 = 16$ ,  $a_{10} = 28$ . Oblicz  $a_{18}$  oraz  $S_{20}$ .

**Zadanie 4.** W ciągu arytmetycznym  $(a_n)$ , określonym dla  $n \geq 1$ ,  $a_5 + a_6 + a_7 = 30$ . Oblicz  $a_6$ .

**Zadanie 5.** W ciągu arytmetycznym  $(a_n)$ , określonym  $n \geq 1$ , dane są:  $a_1 = 2$  i  $a_7 = 32$ .

Oblicz  $a_{13}$ .

**Zadanie 6.** Dany jest ciąg arytmetyczny  $(a_n)$ , określonym  $n \geq 1$ , w którym  $a_3 = -4$  i  $a_6 = -13$ . Wyznacz różnicę ciągu.

**Zadanie 7.** Oblicz  $x$ , gdy kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego  $(a_n)$  są liczby:

a)  $\sqrt{3}$ ,  $x$ ,  $\sqrt{3} + 4$

b)  $2$ ,  $x^2 + 4$ ,  $2x + 10$

**Zadanie 8.** Dany jest ciąg arytmetyczny  $(a_n)$ , określonym  $n \geq 1$ , w którym  $a_1 = 2$ ,  $a_{11} = 32$ . Wyznacz różnicę  $r$  i wzór ogólny tego ciągu.

**Zadanie 9.** Dane są trzy początkowe wyrazy ciągu arytmetycznego  $(a_n)$ :  $a_1 = x$ ,  $a_2 = 2x + 3$ ,  $a_9 = 8x + 26$ . Wyznacz  $a_1$  oraz różnicę  $r$  tego ciągu.

**Zadanie 10.** W ciągu arytmetycznym  $(a_n)$ , określonym  $n \geq 1$ :  $S_6 = 15$ ,  $S_3 = 3$ . Oblicz  $a_5$ .

**Zadanie 11.** Dane są trzy początkowe wyrazy ciągu arytmetycznego:  $x$ ,  $2x - 1$ ,  $2x + 2$ . Oblicz:  $x$ , różnicę tego ciągu  $r$  oraz  $S_{10}$ .



**Zadanie 12.** Oblicz różnicę ciągu arytmetycznego, w którym trzy pierwsze wyrazy są równe 7,  $3x - 1$ ,  $5x - 4$ .

**Zadanie 13.** Oblicz sumę dwudziestu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego  
(6, 13, 20, ...).

**Zadanie 14.** Liczby:  $x$ ,  $4x + 3$ , 25 są odpowiednio pierwszym, szóstym i ósmym wyrazem ciągu arytmetycznego. Wyznacz  $x$  oraz różnicę tego ciągu.

**Zadanie 15.** W ciągu arytmetycznym  $(a_n)$ , określonym  $n \geq 1$ ,  $S_{19} = 50$  i  $S_{22} = 32$ . Oblicz  $a_{21}$ .

**Zadanie 16.** W ciągu arytmetycznym  $(a_n)$ , określonym  $n \geq 1$ ,  $a_{13} + a_{17} = 150$ .  
Oblicz  $a_5 + a_{25}$ .

**Zadanie 17.** Wyznacz wzór na ogólny ciąg arytmetycznego  $(a_n)$ , w którym  $a_2 = 8$  i  $a_{20} = 62$ .

**Zadanie 18.** Oblicz sumę wszystkich ujemnych wyrazów ciągu arytmetycznego  $(a_n)$ , określonego wzorem:

a)  $a_n = 5n - 40$

b)  $a_n = 2n - 202$

**Zadanie 19.** Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 2.

**Zadanie 20.** Oblicz  $a_{100}$  ciągu arytmetycznego, w którym  $a_4 = 12$  i  $a_7 = 27$ .

**Zadanie 21.** Oblicz  $a_1$ , gdy  $a_8 = 5$  i  $r = -3$ .

**Zadanie 22.** Suma trzech początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego wynosi 54, a  $a_1 = 9$ .  
Wyznacz  $r$ .

**Zadanie 23.** Dane są trzy kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego:  $x + 2$ ,  $3x$ ,  $6x - 4$ . Wyznacz  $x$ .

**Zadanie 24.** Wyznacz  $x$  w ciągu arytmetycznym wiedząc, że kolejnymi wyrazami tego ciągu są liczby:  $\frac{1}{x}$ ,  $8x + 9$ ,  $64x + 4$  dla  $x \neq 0$ .

**Zadanie 25.** W ciągu arytmetycznym  $a_1 = x$ ,  $a_2 = 2x - 1$  i  $a_8 = 17$ . Wyznacz  $x$ .

**Zadanie 26.** W ciągu arytmetycznym  $S_{50} = 6$ ,  $S_{49} = 2$ . Oblicz  $a_{50}$ .

**Zadanie 27.** W ciągu arytmetycznym  $S_{20} = 10$ ,  $S_{19} = 3$ . Oblicz  $a_1$ .

**Zadanie 28.** W ciągu arytmetycznym  $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ . Wyznacz  $a_5$ .

**Zadanie 29.** Wyznacz sumę wszystkich dodatnich wyrazów ciągu arytmetycznego o wyrazie ogólnym  $a_n = 16 - 2n$ .

**Zadanie 30.** Oblicz średnią arytmetyczną wyrazów  $a_3$  i  $a_5$  ciągu  $a_n = -3n - 2$ .

**Zadanie 31.** Dany jest ciąg arytmetyczny  $(a_n)$  określony dla  $n \geq 1$ , w którym  $a_9 = 32$  i  $r = -2$ .

Wyznacz:

- a)  $a_1$ ,  $a_{30}$
- b)  $S_{20}$
- c) wzór ogólny ciągu

**Zadanie 32.** Dany jest ciąg arytmetyczny  $(a_n)$  określony dla  $n \geq 1$ , w którym  $a_3 = -7$ ,  $a_9 = 5$ .

Wyznacz:

- a)  $a_1$  i  $r$
- b)  $a_{11}$
- c)  $S_{15}$
- d) różnicę  $a_{15} - a_{11}$ .

**Zadanie 33.** Dany jest ciąg arytmetyczny o wyrazie ogólnym  $a_n = 2n - 13$ . Oblicz sumę wszystkich ujemnych wyrazów tego ciągu.

## Odpowiedzi (X)

3.  $a_{18} = 52$ ,  $S_{20} = 590$

4.  $a_6 = 10$

5.  $a_{13} = 62$

6.  $r = -3$

7a)  $x = \sqrt{3} + 2$

7b)  $x = -1$  lub  $x = 2$

8.  $r = 3$ ,  $a_n = 3n - 1$

9.  $a_1 = 2$ ,  $r = 5$

10.  $a_5 = 4$

11.  $x = 4$ ,  $r = 3$ ,  $S_{10} = 175$

12.  $r = 7$

13.  $S_{20} = 1450$

14. $x = 4, r = 3$	15. $a_{21} = -6$	16. 150
17. $a_n = 3n + 2$	18a) $-140$	18b) $-10100$
19. 981	20. 492	21. $a_1 = 26$
22. $r = 9$	23. $x = 2$	24. $x = \frac{1}{6}$ lub $x = \frac{1}{8}$
25. $x = 3$	26. $a_{50} = 4$	27. $a_1 = -6$
28. $a_5 = 5$	29. $S = 56$	30. $\bar{x} = -14$
31a) $a_1 = 48, a_{30} = -10$	31b) $S_{20} = 580$	31c) $a_n = -2n + 50$
32a) $a_1 = -11, r = 2$	32b) $a_{11} = 9$	32c) $S_{15} = 45$
32d) 8	33. $S = -36$	

## XI. CIĄG GEOMETRYCZNY

**Zadanie 1.** Zbadaj, czy ciąg  $(a_n)$  jest ciągiem geometrycznym.

- a)  $a_n = 3 - n$                       b)  $a_n = 2^n - 1$                       c)  $a_n = n^2 + 1$

**Zadanie 2.** Wykaż, że ciąg  $(a_n)$  jest geometryczny:

- a)  $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$                       b)  $a_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$                       c)  $a_n = \frac{2^{3n-1}}{5}$   
d)  $a_n = (-3)^{2n-1}$                       e)  $a_n = \frac{4}{3^{n-1}}$                       f)  $a_n = \frac{2}{5^{2n+1}}$

*Wskazówka*

Wyznacz iloraz  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ .

**Zadanie 3.** Dany jest ciąg geometryczny  $(a_n)$ . Oblicz  $a_1$  oraz iloraz  $q$ .

- a)  $a_3 = 16, a_4 = 32,$                       b)  $a_3 = 3, a_5 = 9,$                       c)  $a_2 = 2$  i  $a_4 = 32$

**Zadanie 4.** W ciągu geometrycznym  $a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 = -27$ . Oblicz  $a_6$ .

**Zadanie 5.** Wykaż, że podane liczby są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

- a)  $2\sqrt{2}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{2},$                       b)  $\sqrt{5} - 2, \sqrt{5} + 2, 17\sqrt{5} + 38$

**Zadanie 6.** Dany jest ciąg geometryczny  $(a_n)$ , w którym  $a_3 = -1 - 2\sqrt{3}$  i  $a_4 = 2 + 4\sqrt{3}$ . Uzasadnij, że iloraz  $q$  tego ciągu jest liczbą całkowitą.

**Zadanie 7.** Oblicz  $x$ , jeśli podane liczby są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego  $(a_n)$ :

- a) 2, 6,  $x$ ,                                      b) 4,  $x$ , 16,                                      c) 3,  $2x - 3$ , 27,  
 d)  $x - 3$ ,  $2x - 4$ , 16,                                      e)  $x^2 - 3$ ,  $3x - 1$ , 25,                                      f) 4,  $x + 5$ , 9,  
 g)  $8 - x$ ,  $x$ ,  $2x + 6$ ,                                      h)  $x$ ,  $2x + 3$ ,  $4x + 3$ ,

**Zadanie 8.** Dane są wyrazy ciągu geometrycznego:  $a_1 = 6$ ,  $a_4 = 48$ . Wyznacz wzór ogólny ciągu.

**Zadanie 9.** W ciągu geometrycznym  $(a_n)$   $a_1 = 6$ ,  $S_2 = 24$ . Oblicz  $S_4$ .

**Zadanie 10.** Między 9 i  $\frac{1}{81}$  wstaw pięć takich liczb, aby wraz z danymi tworzyły ciąg geometryczny.

## Odpowiedzi (XI)

1a) nie	1b) nie	1c) nie
3a) $a_1 = 4$ , $q = 2$	3b) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ q = \sqrt{3} \end{cases}$ lub $\begin{cases} a_1 = 1 \\ q = -\sqrt{3} \end{cases}$	3c) $\begin{cases} a_1 = -\frac{1}{2} \\ q = -4 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ q = 4 \end{cases}$
4. $a_6 = -3$	6. $q = -2$	7a) $x = 18$
7b) $x = -8$ lub $x = 8$	7c) $x = -3$ lub $x = 6$	7d) $x = 4$
7e) $x = -2\frac{3}{8}$ lub $x = 2$	7f) $x = -11$ lub $x = 1$	7g) $x = -\frac{8}{3}$ lub $x = 6$
7h) $x = -1$	8. $a_n = 3 \cdot 2^n$	9. $S_4 = 240$
10. $(3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27})$ lub $(-3, 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27})$		

## XII. CIĄG ARYTMETYCZNY I GEOMETRYCZNY

**Zadanie 1.** Dany jest nieskończony rosnący ciąg arytmetyczny  $(a_n)$  dla  $n \geq 1$  taki, że  $a_6 = 12$ . Wyrazy  $a_1$ ,  $a_7$  i  $a_{49}$  są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem pewnego ciągu geometrycznego. Wyznacz wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu  $(a_n)$ .

**Zadanie 2.** Dany jest nieskończony rosnący ciąg arytmetyczny  $(a_n)$  dla  $n \geq 1$  taki, że  $a_7 = 10$ . Wyrazy  $a_3$ ,  $a_5$  i  $a_{11}$  są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem pewnego ciągu geometrycznego. Wyznacz wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu  $(a_n)$ .

**Zadanie 3.** Dany jest nieskończony rosnący ciąg arytmetyczny  $(a_n)$  dla  $n \geq 1$  taki, że  $a_{13} = 37$ . Wyrazy  $a_1$ ,  $a_2$  i  $a_6$  są odpowiednio pierwszym, trzecim i piątym wyrazem pewnego ciągu geometrycznego. Wyznacz wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu  $(a_n)$ .

**Zadanie 4.** Dany jest nieskończony rosnący ciąg arytmetyczny  $(a_n)$  dla  $n \geq 1$  taki, że  $a_3 = 5$ . Wyrazy  $a_3$ ,  $a_4$  i  $a_6$  są odpowiednio pierwszym, trzecim i piątym wyrazem pewnego ciągu geometrycznego. Wyznacz pięć początkowych wyrazów ciągu  $(a_n)$ .

**Zadanie 5.** Spośród liczb  $(3, 9, x, x + y)$  trzy pierwsze tworzą ciąg arytmetyczny, a trzy ostatnie ciąg geometryczny. Wyznacz  $x$  oraz  $y$ .

**Zadanie 6.** Dany jest ciąg czterech liczb  $(x + 10, 27, y, 3)$  Wyznacz  $x$  oraz  $y$  wiedząc, że trzy pierwsze wyrazy tworzą ciąg arytmetyczny, a trzy ostatnie ciąg geometryczny.

### Odpowiedzi (XII)

1.  $a_n = 2n$

2)  $a_n = 2n - 4$

3)  $a_n = 3n - 2$

4.  $-5, 0, 5, 10, 15$

5.  $\begin{cases} x = 15 \\ y = 10 \end{cases}$

6.  $\begin{cases} x = 35 \\ y = 9 \end{cases}$  lub  $\begin{cases} x = 53 \\ y = -9 \end{cases}$

## XIII. GEOMETRIA ANALITYCZNA

**Zadanie 1.** Wyznacz równanie prostej  $l$  równoległej do prostej  $k$  i przechodzącej przez punkt  $A$ :

- |                             |                                    |
|-----------------------------|------------------------------------|
| a) $k: y = 2x - 1,$         | $A = \left(\frac{1}{2}, 3\right),$ |
| b) $k: 3x - y + 5 = 0,$     | $A = (1, -4),$                     |
| c) $k: y = -\sqrt{2}x + 2,$ | $A = (\sqrt{8}, -1).$              |
| d) $k: 2x - y + 8 = 0,$     | $A = (0, 2).$                      |
| e) $k: y = -3x + 4,$        | $A = (0, -2).$                     |

**Zadanie 2.** Wyznacz równanie prostej  $l$  prostopadłej do prostej  $k$  i przechodzącej przez punkt  $P$ :

- a)  $k: y = \frac{1}{2}x - 3, \quad P = \left(\frac{1}{3}, -2\right),$   
 b)  $k: y = \sqrt{3}x + 2, \quad P = (3, -5),$   
 c)  $k: 2y - x + 24 = 0, \quad P = \left(\frac{1}{3}, 6\right).$   
 d)  $k: -8x + 4y - 6 = 0, \quad P = (-1, -5).$   
 e)  $k: y = -2\frac{1}{3}x + 4, \quad P = (0, 1).$

**Zadanie 3.** Wyznacz  $m$ , dla którego proste  $k$  i  $l$  są równoległe:

- a)  $k: y = 3x - 1, \quad l: y = (m - 4)x + 2,$   
 b)  $k: y = (2m + 1)x + 2, \quad l: y = -m^2x - m + 3.$

**Zadanie 4.** Dla jakiej wartości parametru  $m$  proste  $y = (m - 4)x + 6m - 12$  oraz  $y = (2m + 4)x - 1$  są równoległe?

**Zadanie 5.** Dla jakich wartości parametru  $m$  proste  $y = \left(\frac{1}{4m+1}\right)x - 7$  i  $y = (4m - 1)x + 2m + 1$  są równoległe?

**Zadanie 6.** Dla jakich wartości parametru  $m$  proste o równaniach  $y = (2m + 6)x - 10$  oraz  $y = (-3m - 4)x + 1$  są równoległe?

**Zadanie 7.** Wyznacz  $m$ , dla którego proste  $k$  i  $l$  są prostopadłe:

- a)  $k: y = (m + 1)x - 2m, \quad l: y = (m + 3)x - 3,$   
 b)  $k: y = (m^2 - 2m)x + 5, \quad l: y = -\frac{1}{2}x + 2m - 1.$

**Zadanie 8.** Dla jakiej wartości parametru  $m$  proste  $y = (m - 2)x + 1$  oraz  $y = (m + 2)x + 3m - 7$  są prostopadłe?

**Zadanie 9.** Dla jakich wartości parametru  $m$  proste o równaniach  $y = (m - 3)x + 12m$  oraz  $y = (m + 3)x - 3$  są prostopadłe?

**Zadanie 10.** Wyznacz współrzędne środka  $S$  odcinka  $AB$ , jeśli:

- a)  $A = (0, -2), B = (4, 0)$   
 b)  $A = (1, -2), B = (4, 0),$   
 c)  $A = (-3, 1), B = (0, -2).$

**Zadanie 11.** W odcinku  $AB$  dany jest punkt  $A = (-3, 2)$  oraz środek odcinka  $S = (1, -2)$ . Oblicz współrzędne punktu  $B$ .

**Zadanie 12.** Punkt  $A = (-4, 5)$  jest końcem odcinka  $\overline{AB}$ , a punkt  $P = (0, 4)$  jego środkiem. Oblicz współrzędne punktu  $B$ .

**Zadanie 13.** Punkt  $A = (-2, 3)$  jest końcem odcinka  $AB$  o środku  $S = (2, 3)$ . Oblicz współrzędne punktu  $B$ .

**Zadanie 14.** Punkt  $S = (0, 0)$  jest środkiem odcinka  $\overline{AB}$ , gdzie  $A = (1, y_A)$ ,  $B = (x_B, 3)$ . Wyznacz  $y_A$  i  $x_B$ .

**Zadanie 15.** Dany jest odcinek  $AB$ , w którym  $A = (x_A, 3)$ ,  $B = (-5, y_B)$  oraz środek  $S = (-1, 3)$ . Oblicz brakujące współrzędne.

**Zadanie 16.** Dany jest równoległobok  $ABCD$ , w którym kolejne wierzchołki mają współrzędne:  $A = (3, -3)$ ,  $B = (3, 2)$ ,  $C = (-2, 1)$ . Wyznacz współrzędne punktu  $S$  przecięcia się przekątnych.

**Zadanie 17.** Dany jest równoległobok  $ABCD$ , w którym kolejne wierzchołki mają współrzędne:  $A = (0, 0)$ ,  $B = (4, 1)$ ,  $C = (6, 5)$ . Wyznacz współrzędne punktu  $S$  przecięcia się przekątnych oraz współrzędne punktu  $D$ .

**Zadanie 18.** Punkty  $A = (-2, 6)$  oraz  $B = (-8, -2)$  są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku  $ABCD$ , a punkt  $S = (2, 0)$  jest punktem przecięcia jego przekątnych. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego równoległoboku oraz jego obwód.

**Zadanie 19.** Dane są dwa kolejne wierzchołki  $A = (-1, -3)$  i  $B = (4, -6)$  kwadratu  $ABCD$ . Wyznacz długość przekątnej kwadratu.

**Zadanie 20.** Dane są dwa kolejne wierzchołki  $A = (0, -8)$ ,  $B = (-5, 2)$  i kwadratu  $ABCD$ . Oblicz pole i obwód tego kwadratu.

**Zadanie 21.** Dany jest kwadrat  $ABCD$  o przekątnej  $AC$ , gdzie  $A = (1, 1)$  i  $C = (6, 8)$ . Wyznacz długości promienia okręgu opisanego na tym kwadracie.

**Zadanie 22.** Dany jest kwadrat  $ABCD$  o boku  $AB$ , gdzie  $A = (0, 0)$ ,  $B = (7, 4)$ . Wyznacz długość promienia  $r$  okręgu wpisanego oraz długość promienia  $R$  okręgu opisanego na tym kwadracie.

**Zadanie 23.** W prostokącie  $ABCD$  dane są przeciwległe wierzchołki  $A = (-1, 2)$  oraz  $C = (3, 4)$ . Wyznacz współrzędne przecięcia się przekątnych tego prostokąta i długość jego przekątnej.

**Zadanie 24.** Dane są wierzchołki  $A = (1, 0)$  oraz  $B = (-2, 4)$  trójkąta równobocznego. Wyznacz wysokość trójkąta i promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

**Zadanie 25.** Dany jest trójkąt równoboczny  $ABC$ , gdzie  $A = (-2, 2)$ ,  $B = (0, 4)$ . Wyznacz długość wysokości  $h$  tego trójkąta.

**Zadanie 26.** Dany jest trójkąt równoboczny  $ABC$ , gdzie  $A = (5, 2)$  i  $B = (2, -1)$ . Oblicz długość  $R$  promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.

**Zadanie 27.** Dane są dwa wierzchołki trójkąta równobocznego  $A = (-2, 1)$  i  $B = (1, -2)$ . Oblicz długość  $h$  wysokości tego trójkąta oraz długość promienia  $r$  okręgu wpisanego w ten trójkąt.

**Zadanie 28.** Punkty  $A = (-3, -2)$  i  $B = (0, 2)$  są wierzchołkami trójkąta równobocznego  $ABC$ . Oblicz:

- obwód
- pole
- równanie prostej zawierającej bok  $AB$
- promień okręgu wpisanego w trójkąt
- promień okręgu opisanego na trójkącie.

**Zadanie 29.** Punkty  $A = (-2, 2)$ ,  $C = (1, 4)$  są wierzchołkami trójkąta równoramiennego  $ABC$ , w którym  $|AC| = |BC|$ . Podstawa  $AB$  zawiera się w prostej  $y = 2$ . Oblicz współrzędne wierzchołka  $B$  tego trójkąta.

**Zadanie 30.** Dane są proste o równaniach  $y = x + 4$  oraz  $y = -\frac{4}{3}x + b$ , które przecinają się w punkcie leżącym na osi  $OY$  układu współrzędnych. Oblicz wartość współczynnika  $b$  oraz pole trójkąta, którego dwa boki zawierają się w danych prostych, a trzeci zawarty jest w osi  $OX$ .

**Zadanie 31.** Oblicz współrzędne punktu  $A$  przecięcia prostych o równaniach  $2x - y + 4 = 0$  i  $y = 3x - 1$  oraz długość odcinka  $AB$  jeśli punkt  $B = (-1, 8)$ .

**Zadanie 32.** Dane są wierzchołki trójkąta  $A = (1, 1)$ ,  $B = (4, 3)$ ,  $C = (2, 4)$ . Z wierzchołka  $C$  poprowadzono wysokość tego trójkąta, która przecina bok  $AB$  w punkcie  $D$ . Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt  $D$  i równoległej do boku  $BC$ .

**Zadanie 33.**  $A = (-2, 0)$ ,  $B = (5, -1)$ ,  $C = (2, 3)$  Oblicz obwód trójkąta  $ABC$  oraz sprawdź, czy jest równoramienny. Jeśli tak, wyznacz równanie osi symetrii tego trójkąta.

**Zadanie 34.** Dane są dwie proste  $y = 2x - 1$  oraz  $y = -3x + b$ , które przecinają oś  $OX$  w tym samym punkcie. Oblicz wartość współczynnika  $b$  oraz pole trójkąta ograniczonego tymi prostymi oraz osią  $OY$ .



## Odpowiedzi (XIII)

1. a)  $y = 2x + 2$       b)  $y = 3x - 7$       c)  $y = -\sqrt{2}x + 3$   
 d)  $y = 2x + 2$       e)  $y = -3x - 2$
2. a)  $y = -2x - 1\frac{1}{3}$       b)  $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3} - 5$       c)  $y = -2x + 6\frac{2}{3}$   
 d)  $y = -\frac{1}{2}x - 5\frac{1}{2}$       e)  $y = \frac{3}{7}x + 1$
3. a)  $m = 7$       b)  $m = -1$
4.  $m = -8$       5.  $m = \frac{\sqrt{2}}{4}$  lub  $m = -\frac{\sqrt{2}}{4}$
6.  $m = -2$       7. a)  $m = -2$       b)  $m = 1 + \sqrt{3}$  lub  $m = 1 - \sqrt{3}$
8.  $m = \sqrt{3}$  lub  $m = -\sqrt{3}$       9.  $m = 2\sqrt{2}$  lub  $m = -2\sqrt{2}$
10. a)  $S = (2, -1)$       b)  $S = (\frac{5}{2}, -1)$       c)  $S = (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$
11.  $B = (5, -6)$       12.  $B = (4, 3)$
13.  $B = (6, 3)$       14.  $y_A = -3, x_B = -1$
15.  $x_A = 3, y_B = 3$       16.  $S = (\frac{1}{2}, -1)$
17.  $S = (3, 2\frac{1}{2}), D = (2, 4)$       18.  $C = (6, -6), D = (12, 2), L = 20 + 4\sqrt{53}$
19.  $d = 2\sqrt{17}$       20.  $P = 125, L = 20\sqrt{5}$
21.  $R = \frac{\sqrt{74}}{2}$       22.  $r = \frac{\sqrt{65}}{2}, R = \frac{\sqrt{130}}{2}$
23.  $S = (1, 3), |AC| = 2\sqrt{5}$       24.  $h = \frac{5\sqrt{3}}{2}, R = \frac{5\sqrt{3}}{3}$
25.  $h = \sqrt{6}$       26.  $R = \sqrt{6}$
27.  $h = 3, r = 1$
28. a)  $L = 15,$       b)  $P = \frac{25\sqrt{3}}{4},$       c)  $y = \frac{4}{3}x + 2$       d)  $r = \frac{5\sqrt{3}}{6},$       e)  $R = \frac{5\sqrt{3}}{3},$
29.  $B = (4, 2)$       30.  $b = 4, P = 14$
31.  $A = (5, 14), |AB| = 6\sqrt{2}$       32.  $D = (\frac{40}{13}, \frac{31}{13}), y = -\frac{1}{2}x + \frac{51}{13}$
33.  $y = 7x - 11, L = 10 + 5\sqrt{2}$       34.  $b = \frac{3}{2}, P_\Delta = \frac{5}{8}$